応用複素関数 第2回

桂田 祐史

katurada@meiji.ac.jp

2026年4月21日, 2026年4月28日

2 留数定理の復習・応用 (続き)

2.2 級数の和 (続き)

次の定理は、前回講義中に板書済みである。

定理 2.1 (級数の和の公式) $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z)+2$, $(\forall n \in \mathbb{Z})\ P(n) \neq 0$, $f = \dfrac{Q}{P}$ とするとき

(1)
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}\left(f\, s_2; c\right),$$

(2)
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}\left(f\, s_1; c\right),$$

(3)
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{in\theta} = -\sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}\left(f(z) s_3(z) e^{iz\theta}; c\right) \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

ただし

(4a)
$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi \operatorname{cosec}(\pi z),$$

(4b)
$$s_2(z) := \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z),$$

(4c)
$$s_3(z) := s_2(z) - i\pi \quad \left(= \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1}\right).$$

証明 以下の積分路 Γ_N $(N \in \mathbb{N})$ を用いる。

- 曲線 Γ_N 上には s_1, s_2, s_3 の極 (赤い点) はない。極との距離は $1/2$.
- $|s_j(z)| \leq 2\pi$ $(j = 1, 2;\ z \in \Gamma_N^*)$.

  (この不等式の証明に難しいところはないが (自明という訳でもない)、意外に面倒なのでここではサボる。講義ノート [1] §1.3 には書いてある。問にしてあるが、解答が pp. 124–125 にある。ちなみに s_3 については、$|s_3(z)| \leq 3\pi$ $(z \in \Gamma_N^*)$ が成り立つ。)

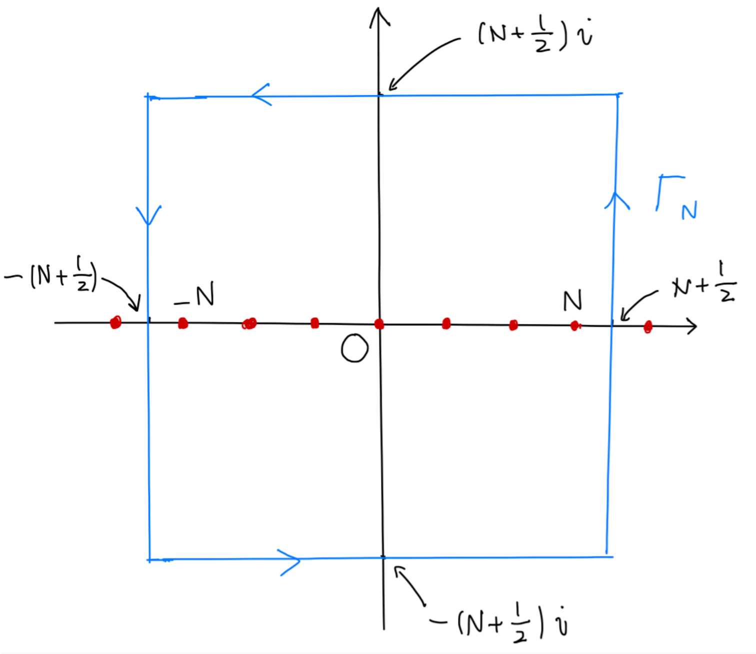


図 1: 1 辺 $2(N+1/2)$ の正方形の周を正の向きに回る

$P(z)$, $Q(z)$ についての仮定より、ある $R, C \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad P(z) \neq 0 \land |f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}.$$

以下 $N \in \mathbb{N}$ は $N \geq R$ を満たすとする。P と Q は $\mathbb{C}$ 全体で正則であるので、f のすべての極は P の零点であり、それらは $D(0; R)$ に含まれる。ゆえに Γ_N の内部に含まれる。

以下 (1), (2) (つまり $j = 1, 2$) の場合の証明を記すが、(3) も同様に証明できる (式を統一的に書くのが面倒なだけ)。

留数定理によって

$$\int_{\Gamma_N} f(z) s_j(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=-N}^{N} \operatorname{Res}\left(f s_j; k\right) + 2\pi i \sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f s_j; c\right).$$

k は s_j の 1 位の極であり、f は k のある近傍で正則であるから

$$\operatorname{Res}(f s_j; k) = f(k) \operatorname{Res}\left(s_j; k\right) = \begin{cases} (-1)^k f(k) & (j=1) \\ f(k) & (j=2). \end{cases}$$

後は $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_{\Gamma_N} f(z) s_j(z)\, dz = 0$ を示せば良い。$|f(z)| \leq \dfrac{C}{N^2}$ $(z \in \Gamma_N)$ であるから

$$\left| \int_{\Gamma_N} f(z) s_j(z)\, dz \right| \leq \int_{\Gamma_N} |f(z)|\, |s_j(z)|\, |dz| \leq \frac{C}{N^2} \cdot 2\pi \int_{\Gamma_N} |dz|$$
$$= \frac{2\pi C}{N^2} \cdot 4(2N+1) \to 0 \quad (N \to \infty). \blacksquare$$

2026 年 4 月 14 日の講義は、次の例の結果を予告したところで終了した。

例 2.3 (Basel 問題 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler による 1748 の結果), ζ 関数 ($\zeta(z) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$) の正の偶数での

定理の仮定 $(\forall n \in \mathbb{Z})$ $P(n) \neq 0$ が満たされない場合も、上の証明をたどると次が示せる。

(5)
$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \land P(n) \neq 0} f(n) = - \sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f s_2; c\right).$$

($P(n)=0$ となる $n\in\mathbb{Z}$ が f の極となるので、右辺に移項した、ということである。)

$f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ ($P(z)=z^2$, $Q(z)=1$) の場合にこれを用いると

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}\land n^2\neq 0}f(n)=-\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}}\operatorname{Res}\left(fs_2;c\right)=-\operatorname{Res}\left(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2};0\right).$$

ところで

$$\cot z=\frac{1}{z}-\frac{z}{3}-\frac{z^3}{45}+\cdots\quad(0<|z|<\pi)$$

であるから (桂田 [1] の p. 25 付近に書いてある, 一応以下に抜き出す)、

(6)
$$\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}=\frac{1}{z^3}-\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{1}{z}-\frac{\pi^4}{45}z+\cdots\quad(0<|z|<1).$$

ゆえに $\operatorname{Res}\left(\dfrac{\pi\cot(\pi z)}{z^2};0\right)=-\dfrac{\pi^2}{3}$. ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

ちなみにまったく同様にして $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$ が得られる。より一般に cot の Laurent 展開を求めることで、$\zeta(2s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}$ ($s=1,2,\cdots$) が求まる。■

注意 2.4 $\zeta(2s)$ の求め方として、Fourier 級数を利用する方法も知られている。■

注意 2.5 (後始末: cot の 0 のまわりの Laurent 展開) $\cot z$ の $z=0$ での Laurent 展開を数項だけ求める。

$$\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4!}-\cdots}{z(1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5}z^4-\cdots)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1-\frac{w}{2}+\frac{w^2}{4!}-\cdots}{1-\frac{1}{3!}w+\frac{1}{5}w^2-\cdots}$$
$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}a_nw^n\quad(0\text{ の近傍で正則なので展開できるはず}).$$

(ただし $w=z^2$ とおいた。)

$$\frac{1-\frac{w}{2}+\frac{w^2}{4!}-\cdots}{1-\frac{1}{3!}w+\frac{1}{5}w^2-\cdots}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nw^n.$$

分母を払うと

$$1-\frac{w}{2!}+\frac{w^2}{4!}-\cdots=\left(1-\frac{1}{3!}w+\frac{1}{5!}w^2-\cdots\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_nw^n.$$

右辺を展開して、係数を比較しよう。

$$1-\frac{w}{2}+\frac{w^2}{24}-\cdots=a_0+\left(a_1-\frac{a_0}{6}\right)w+\left(a_2-\frac{a_1}{6}+\frac{a_0}{120}\right)w^2+\cdots$$

これから

$$a_0=1,\quad a_1=-\frac{1}{3},\quad a_2=-\frac{1}{45},\quad\cdots$$

と求まる。

Mathematica で検算: `Series[Cot[z],{z,0,10}]` ■

注意 2.6 tan,cot の 0 のまわりの Laurent 展開は重要なので、よく調べられていて、一般項を表す公式が知られている (複素関数の講義ノートである桂田 [2] の命題 7.17, Bernoulli 数を用いる)。今回のような目的には一般項は必要ないので、上で説明したような冪級数の割り算を実行した。■

3　正則関数の表現 — 無限和と無限積

3.1　はじめに

キーワードは、広義一様収束, Weierstrass の二重級数定理, それと無限積。

色々な式が自由自在に扱えるようになる (なりつつある)。これまでは無限級数と言っても、冪級数、Laurent 級数に限られていた。

有名な式を 3 つあげよう。

$$\pi\cot(\pi z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z}{z^2-n^2}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right). \tag{7}$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-n)^2}+\frac{1}{(z+n)^2}\right). \tag{8}$$

— cot, cosec の部分分数展開、と呼ぶべきだろうか。
(極とその位数・留数を見ると、成り立つかもしれなさそうな式ではある。Laurent 展開の主部を集めたらピッタリ一致する…ちょっとうまく行き過ぎ？)
前節で学んだ和の公式を用いて、(7) と (8) を直接証明できる！

Euler による sin の因数分解

$$\sin(\pi z)=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\quad(\text{両辺ともに } z=0,\pm n \text{ で } 0) \tag{9}$$

(sin は多項式ではないけれど、もしも因数定理が成り立つならば…零点とその位数を見ると、成り立つかもしれなさそうな式ではある。)

補題 3.1

$$(\pi\cot(\pi z))'=-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$$

証明　単なる計算で証明できる。商の微分法より

$$(\pi\cot(\pi z))'=\left(\frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right)'=\pi\frac{\sin(\pi z)\cdot\pi(-\sin(\pi z))-\pi\cos(\pi z)\cdot(\cos(\pi z))}{\sin^2(\pi z)}=-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}.\blacksquare$$

この補題 3.1 から、(7) を項別微分して (−1) をかけたものが (8) である、という関係があることが分かる。実は、次項で学ぶ**二重級数定理**を用いると、この項別微分が簡単に正当化できる。すると、(7) と (8) のどちらか一方からもう片方を導出できる (別々に証明するよりも経済的だろう)。

さて、有限個の関数の積について、次式が成り立つことを思い出そう:

$$f=\prod_{j=1}^{n}g_j\quad\Rightarrow\quad\frac{f'}{f}=\sum_{j=1}^{n}\frac{g_j'}{g_j}\quad(\text{対数微分}).$$

実は、無限積の場合にもこのような対数微分が成り立つ。それを用いると、(9) から (7) が導かれる。

注意 3.2 (収束チェックは忘れずに) (7) の右辺を見ると、

$$\pi\cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-n} \quad \text{(魅力的だが実は成り立たない式)}$$

と書きたくなるが、この右辺の級数は収束しないのでマズイ。$\dfrac{1}{z-n}$ と $\dfrac{1}{z+n}$ を組み合わせることで収束するようになる。■

ここでは、まず前節で学んだ和の計算法から (8) を証明しよう。

(8) の証明 次のように文字を書き換えると、パッと目の前が開ける。

$a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ とするとき

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a-n)^2}$$

を求めよ。

$$P(z) := (a-z)^2,\quad Q(z) := 1,\quad f(z) := \frac{Q(z)}{P(z)}$$

とおくと、

$$P(z), Q(z)\in\mathbb{C}[z],\quad \deg P(z)\ge \deg Q(z)+2,\quad (\forall n\in\mathbb{Z})\quad P(n)\ne 0$$

が成り立ち、

$$\frac{1}{(a-n)^2} = f(n).$$

ゆえに

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a-n)^2} = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}}\operatorname{Res}(fs_2;c) = -\operatorname{Res}(fs_2;a) = -\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to a}\left[(z-a)^2 f(z)s_2(z)\right]^{(2-1)}$$
$$= -\lim_{z\to a}s_2'(z) = -s_2'(a) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}.$$

a を z に書き戻して

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}).■$$

問 $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ とする。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^2-n^2}$$

を求めることにより、(7) を証明せよ。

解答 $f(z) := \dfrac{a}{a^2-z^2}$ とおくと、f の極は $z=\pm a$.

$$\operatorname{Res}(f;a) = \left.\frac{a}{(a^2-z^2)'}\right|_{z=a} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Res}(f;-a) = \left.\frac{a}{(a^2-z^2)'}\right|_{z=-a} = \frac{1}{2}.$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2-n^2} &= -\sum_{c\,\text{は}\,f\,\text{の極}} \operatorname{Res}(f s_2; c) = -\left(\operatorname{Res}(f s_2; a) + \operatorname{Res}(f s_2; -a)\right) \\
&= -\left(s_2(a)\operatorname{Res}(f; a) + s_2(-a)\operatorname{Res}(f; -a)\right) \\
&= -\left(\pi\cot(\pi a)\cdot\frac{-1}{2} + \pi\cot(-\pi a)\cdot\frac{1}{2}\right) \\
&= \pi\cot(\pi a).\blacksquare
\end{aligned}
$$

問 1. $\pi\,\mathrm{cosec}(\pi z)$ の部分分数展開を求めよ。

4 問の解答

解答 1. (結果のみ)

$$
\pi\,\mathrm{cosec}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2z}{z^2-n^2}.
$$

A ちょっと講釈: sec, cosec, cot

三角関数というと、学校数学では sin, cos, tan の露出度が高いが、sec(セカント), cosec(コセカント), cot(コタンジェント) というのもある:

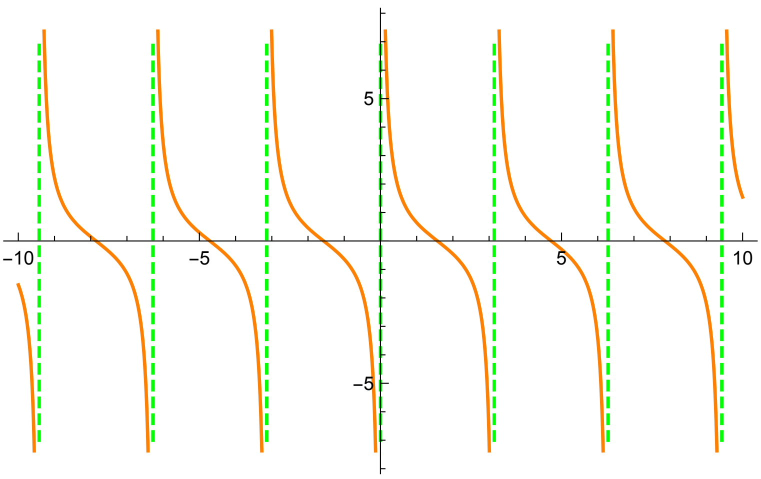
$$
\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.
$$

大昔の三角関数表には (Wikipedia の Trigonometric tables 等参照)、sin, tan, sec の値が載っていた。

cos(ine), cot(angent), cosec(ant) は、それぞれ余角の sin, tan, sec である:

$$
\mathrm{co}\,\text{某}\;\theta = \text{某}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \quad \text{(ゆえに数表はほとんど不要)}.
$$

$y=\cot x$ のグラフは、$\cot x = \tan(\pi/2 - x)$ に気づくとすぐ分かる。



参考文献

[1] 桂田祐史：続 複素関数論,「複素関数」講義ノートの続き. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/zoku-complex-function.pdf (2015〜).

[2] 桂田祐史：複素関数論ノート, 数学科での講義科目「関数論 2」の講義ノートあらため 現象数理学科の「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/complex-function.pdf (2008〜).