応用複素関数 第1回

桂田 祐史

katurada@meiji.ac.jp

2026年4月14日, 2026年4月28日

1 はじめに

授業資料のWWWサイト

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/

2年秋学期「複素関数・同演習」に続くもの。そちらの授業資料は次のサイトにある。

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex/

「複素関数・同演習」は、Cauchyの積分定理・積分公式、Taylor展開・Laurent展開、留数定理、がその主な内容だった。これはスタンダード。

関数論のその先？

- 楕円関数
- 代数関数
- Riemann面
- Riemannの写像定理, 等角写像, ポテンシャル問題
- 特殊関数
- 佐藤の超函数
- 多変数複素関数論

どれも分厚いテキストが必要になる。

この講義は大きく2つの内容からなる。

1. 複素関数論の基礎 (「複素関数」の続き)
   無限級数の和, 無限積, ∞ の導入, Riemann球面 $\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, 1次分数変換 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$, 等角写像, Riemannの写像定理, ポテンシャル問題, 解析接続, 分岐点
2. 応用トピック— 応用上の重要さだけでなく、全体像の理解に役立つ、コンピューターとの関係からピックアップ
   - 流体力学への応用 (2次元ポテンシャル流)

- ポテンシャル問題の数値解法
- 数値等角写像
- 佐藤超函数
- 数値積分の誤差解析

Mathematica, FreeFEM を利用する。Mathematica のライセンスが有効であることをチェックしておこう。もし切れていたら、相談 (Meiji Mail からメール下さい)。

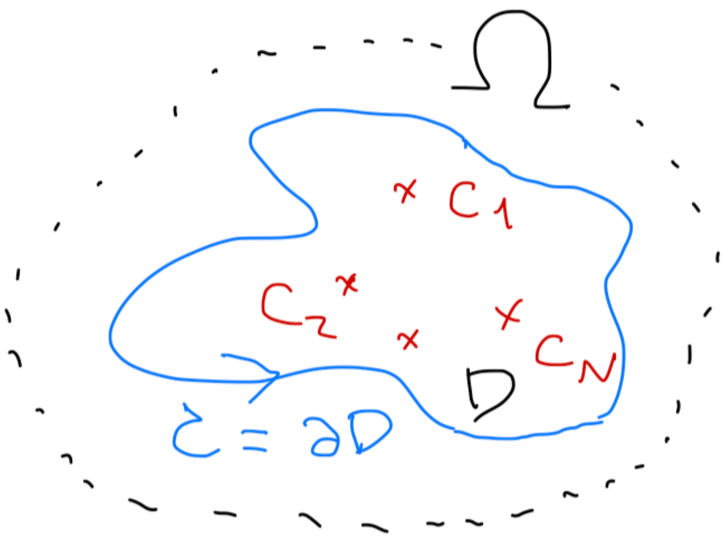
2 留数定理の復習・応用

用語・記号の定義を確認したければ、「複素関数」の講義ノート桂田 [1] を見よ。

2.1 復習 (超特急)

定理 2.1 (留数定理) D は $\mathbb{C}$ 内の有界領域で、その境界 ∂D は区分的 C^1 級正則単純閉曲線とする (向きはいわゆる正の向きとする)。また $c_1, c_2, \cdots, c_N$ は D 内の相異なる点であり、Ω は $\overline{D} \subset \Omega$ を満たす $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \setminus \{c_1, c_2, \cdots, c_N\} \to \mathbb{C}$ は正則とする。このとき、

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}\,(f; c_j)\,.$$



定理 2.2 (極の留数) $k \in \mathbb{N}$, c が f の高々 k 位の極ならば、

$$\mathrm{Res}(f; c) = \lim_{\substack{z \neq c \\ z \to c}} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} \left[(z-c)^k f(z)\right].$$

$k = 1$ の場合だけピックアップすると、次の定理になる。

系 2.3 (1 位の極の留数) c が f の高々 1 位の極ならば、

$$\operatorname{Res}(f;c)=\lim_{z\to c}(z-c)f(z). \tag{1}$$

次も $k=1$ の場合である。lim の計算よりも微分が簡単ということが多い。

系 2.4 (有理関数の分母の 1 位の零点における留数) $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $P(z)$ と $Q(z)$ は c の近傍で正則、c は $P(z)$ の 1 位の零点 ($P(c)=0$ かつ $P'(c)\neq 0$ ということ) ならば、c は f の高々 1 位の極で

$$\operatorname{Res}(f;c)=\frac{Q(c)}{P'(c)}. \tag{2}$$

次も $k=1$ の場合で良く出て来る (すぐ後の例で使う)。

系 2.5 (1 位の極を持つ関数と正則関数の積の留数) c は f の 1 位の極であり、φ は c の近傍で正則とする。このとき

$$\operatorname{Res}\left(f\varphi;c\right)=\varphi(c)\operatorname{Res}\left(f;c\right).$$

後の例では

$$\varphi(z)=\log z,\quad \varphi(z)=\pi\operatorname{cosec}\pi z,\quad \varphi(z)=\pi\cot\pi z$$

として利用することが多い。

定積分計算への応用が有名である。2 つ紹介する (復習？)。

定理 2.6 (有理関数の実軸上の積分) $P(z),Q(z)\in\mathbb{C}[z]$, $\deg P(z)\geq \deg Q(z)+2$, $(\forall x\in\mathbb{R})$ $P(x)\neq 0$, $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$ とするとき

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}c>0}\operatorname{Res}\left(f;c\right).$$

(右辺の $\sum$ は、f の極 c のうちで $\operatorname{Im}c>0$ を満たすものについて和を取るという意味)

次の定理は講義ではカットした。

定理 2.7 (有理関数の Fourier 変換) $P(z),Q(z)\in\mathbb{C}[z]$, $\deg P(z)\geq \deg Q(z)+1$, $(\forall x\in\mathbb{R})$ $P(x)\neq 0$, $f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $a>0$ とするとき

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{iax}\,dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}c>0}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz};c\right).$$

これ以外にも色々ある。一松 [2] には面白い例がたくさん載っている。

次を紹介するかどうかは、講義の残り時間を見て決める。— 2026 年度講義では、結局カットした。級数の和 (§§2.2) にジャンプした。

定理 2.8 (実軸上に 1 位の極がある場合の定積分の公式) $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, P は $\mathbb{R}$ 上で高々 1 位の零点しか持たないとする。

(1) $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$ のとき

$$\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f;c) + \pi i \sum_{\operatorname{Im} c=0} \operatorname{Res}(f;c).$$

(2) $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$ のとき、任意の $a > 0$ に対して

$$\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz};c) + \pi i \sum_{\operatorname{Im} c=0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz};c).$$

注意 2.9 (後出し — 主値積分) $\mathrm{p.v.}\int$ は主値 (principal value) 積分を表す。$a \in \mathbb{R}$ が 1 位の極で、$\alpha < a < \beta$ であるとき、広義積分

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to+0}\left(\int_\alpha^{a-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon_2}^\beta f(x)\,dx\right)$$

は存在しないが、

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_\alpha^{a-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon}^\beta f(x)\,dx\right)$$

は存在する (証明はさぼる)。これを $\mathrm{p.v.}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ と表す。■

例 2.10 (Dirichlet 積分)

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Im}\frac{e^{ix}}{x}dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Im}\frac{e^{ix}}{x}dx = \frac{1}{2}\,\operatorname{Im}\left(\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z};0\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\pi i\left.\frac{e^{iz}}{(z)'}\right|_{z=0}\right) = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{Im}\left(\pi i\cdot e^{i0}\right) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(一気に書いたけれど、きちんと理解するには、それなりに時間が必要だと思う。)

複素関数の教科書に指定することのある神保 [3] には、主値積分という言葉を使わずに説明してあるが、やっていることは本質的にこれと同じである。■

2.2 級数の和

無限級数 $\sum_n a_n$ の和を求めるためにも、留数が利用できる場合がある。簡単な場合を紹介する。

$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ で、a_n がある正則関数 f に対して、$a_n = f(n)$ となっている場合を扱う。

アイディア

$$n \in \mathbb{Z} \text{ を 1 位の極に持ち、} \operatorname{Res}(s;n) = 1$$

という条件を満たす s を適当に選んで、$f \cdot s$ の線積分に対して留数定理を適用する ($\operatorname{Res}(f\,s;n) = f(n)\operatorname{Res}(s;n) = f(n)\cdot 1 = f(n)$ に注意)。

具体的には、s として次の関数 s_2 を採用する。
この節を通じて、次式で定める s_1, s_2, s_3 を用いる。

$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi \operatorname{cosec}(\pi z), \tag{3}$$

$$s_2(z) := \frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi\cot(\pi z), \tag{4}$$

$$s_3(z) := s_2(z) - i\pi \quad \left(= \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1}\right). \tag{5}$$

不慣れな三角関数、少し気持ちが悪く感じられるかもしれないが、実は重要人物 (関数) である。
基本的な性質を列挙する。

- s_1, s_2 の定義式の分母、分子は整関数 ($\mathbb{C}$ 全体で正則) である。
- s_1, s_2 の定義式の分母 $\sin(\pi z)$ の零点は n $(n \in \mathbb{Z})$ で、位数は 1.
  実際
  $$\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ \pi z = n\pi \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ z = n.$$
  さらに $\frac{d}{dz}(\sin \pi z)\Big|_{z=n} = \pi\cos(n\pi) = (-1)^n\pi \neq 0.$
- s_1, s_2, s_3 の極は n $(n \in \mathbb{Z})$ で、その位数は 1. 留数は
  $$\operatorname{Res}(s_1;n) = \left.\frac{\pi}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=n} = (-1)^n,$$
  $$\operatorname{Res}(s_3;n) = \operatorname{Res}(s_2;n) = \left.\frac{\pi\cos(\pi z)}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=n} = 1.$$

次の定理が基本的である (定積分の計算についての定理とちょっと似ている)。

定理 2.11 (級数の和の公式) $P(z),\ Q(z) \in \mathbb{C}[z],\ \deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2,\ (\forall n \in \mathbb{Z})$ $P(n) \neq 0,\ f = \dfrac{Q}{P}$ とするとき

(6)
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f\, s_2; c\right),$$

(7)
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f\, s_1; c\right),$$

(8)
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{in\theta} = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \operatorname{Res}\left(f(z) s_3(z) e^{iz\theta}; c\right) \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

2026 年 4 月 14 日の講義では、次の証明は飛ばして (次回やります)、例 2.12 を解説した。

証明　以下の積分路 Γ_N $(N \in \mathbb{N})$ を用いる。

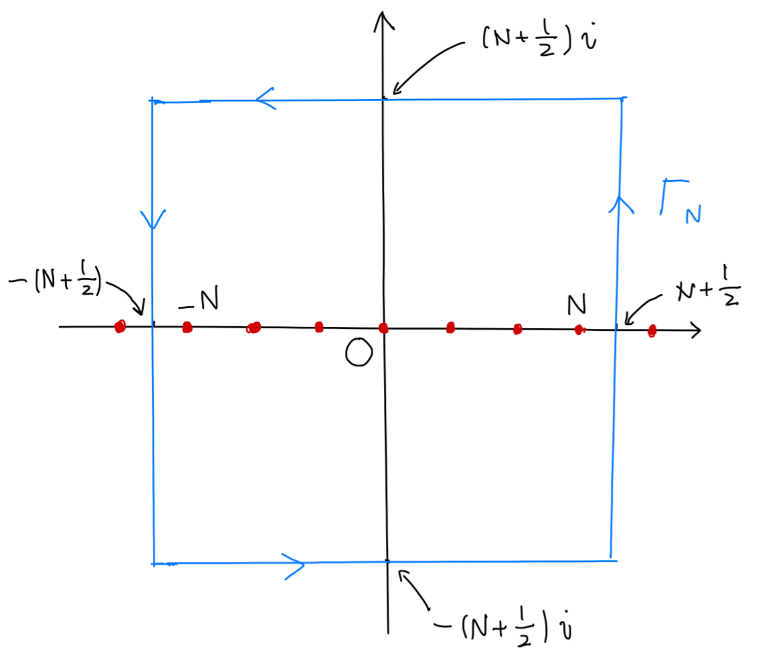


図 1: 1 辺 $2(N+1/2)$ の正方形の周を正の向きに回る

- 曲線 Γ_N 上には $s_1,\ s_2,\ s_3$ の極 (赤い点) はない。極との距離は $1/2$.
- $|s_j(z)| \leq 2\pi$ $(j = 1, 2;\ z \in \Gamma_N^*)$.
  (この不等式の証明に難しいところはないが、意外に面倒なのでここではサボる。講義ノート [4] §1.3 には書いてある。)

$P(z), Q(z)$ についての仮定より

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\exists C \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad P(z) \neq 0 \land |f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}.$$

以下 $N \in \mathbb{N}$ は $N \geq R$ を満たすとする。P と Q は $\mathbb{C}$ 全体で正則であるので、f のすべての極は P の零点であり、それらは $D(0; R)$ に含まれる。ゆえに Γ_N の内部に含まれる。

留数定理によって

$$\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=-N}^{N}\operatorname{Res}(fs_j;k) + 2\pi i\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}}\operatorname{Res}(fs_j;c).$$

k は s_j の 1 位の極であり、f は k のある近傍で正則であるから

$$\operatorname{Res}(fs_j;k) = f(k)\operatorname{Res}(s_j;k) = \begin{cases} (-1)^k f(k) & (j=1) \\ f(k) & (j=2). \end{cases}$$

後は $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz = 0$ を示せば良い。$|f(z)| \le \dfrac{C}{N^2}$ $(z\in\Gamma_N)$ であるから

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z)\,dz\right| &\le \int_{\Gamma_N}|f(z)|\,|s_j(z)|\,|dz| \le \frac{C}{N^2}\cdot 2\pi\int_{\Gamma_N}|dz| \\ &= \frac{2\pi C}{N^2}\cdot 4(2N+1) \to 0 \quad (N\to\infty).\blacksquare\end{aligned}$$

例 2.12 $a>0$ とするとき $S := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$ を求めよう。

関数 $f(z) := \dfrac{1}{z^2+a^2}$ は、定理 2.11 の仮定を満たす。また f は偶関数であるから

$$2S + \frac{1}{a^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}}\operatorname{Res}(fs_2;c).$$

f の極 c は $c=\pm ia$ で位数は 1 であるから

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f\,s_2;c) &= s_2(c)\operatorname{Res}(f;c) = \pi\cot(\pm i\pi a)\cdot\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=\pm ia} \\ &= \pi(-i\coth(\pm\pi a))\cdot\frac{1}{\pm 2ia} = -\frac{\pi}{2a}\coth(\pi a).\end{aligned}$$

(ただし $\cot(iz) = -i\coth z$ を用いた。これについては付録で説明する。)
ゆえに

$$2S + \frac{1}{a^2} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a). \quad \therefore\quad S = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\coth(\pi a) - \frac{1}{a^2}\right).\blacksquare$$

2026 年 4 月 14 日の講義は、次の例の結果を予告したところで終了した。

例 2.13 (Basel 問題 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, ζ 関数の正の偶数での値 $\zeta(2s)$) 定理の仮定 $(\forall n\in\mathbb{Z})\ P(n)\ne 0$ が満たされない場合も、上の証明をたどると次が示せる。

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\wedge P(n)\ne 0} f(n) = -\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}}\operatorname{Res}(fs_2;c). \tag{9}$$

$f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ の場合にこれを用いると

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}\wedge n^2\ne 0} f(n) = -\sum_{c\text{ は }f\text{ の極}}\operatorname{Res}(fs_2;c) = -\operatorname{Res}\left(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2};0\right).$$

ところで

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + \cdots \quad (0 < |z| < \pi)$$

であるから (桂田 [4] の p. 25 付近に書いてある, 一応以下に抜き出す)、

$$\text{(10)} \qquad \frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2} = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{1}{z} - \frac{\pi^4}{45}z + \cdots \quad (0 < |z| < 1).$$

ゆえに $\operatorname{Res}\left(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}; 0\right) = -\frac{\pi^2}{3}$. ゆえに $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

ちなみにまったく同様にして $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ が得られる。より一般に cot の Laurent 展開を求めることで、$\zeta(2s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}$ $(s = 1, 2, \cdots)$ が求まる。■

注意 2.14 (後始末: cot の 0 のまわりの Laurent 展開) $\cot z$ の $z = 0$ での Laurent 展開を数項だけ求める。

$$\begin{aligned}\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} &= \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \cdots}{z(1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5}z^4 - \cdots)} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1 - \frac{w}{2} + \frac{w^2}{4!} - \cdots}{1 - \frac{1}{3!}w + \frac{1}{5}w^2 - \cdots} \\ &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \quad (0 \text{ の近傍で正則なので展開できるはず}).\end{aligned}$$

(ただし $w = z^2$ とおいた。)

$$\frac{1 - \frac{w}{2} + \frac{w^2}{4!} - \cdots}{1 - \frac{1}{3!}w + \frac{1}{5}w^2 - \cdots} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n.$$

分母を払うと

$$1 - \frac{w}{2!} + \frac{w^2}{4!} - \cdots = \left(1 - \frac{1}{3!}w + \frac{1}{5!}w^2 - \cdots\right)\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n.$$

右辺を展開して、係数を比較しよう。

$$1 - \frac{w}{2} + \frac{w^2}{24} - \cdots = a_0 + \left(a_1 - \frac{a_0}{6}\right)w + \left(a_2 - \frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{120}\right)w^2 + \cdots$$

これから

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{3}, \quad a_2 = -\frac{1}{45}, \quad \cdots$$

と求まる。

Mathematica で検算: `Series[Cot[z],{z,0,10}]`

注意 2.15 tan,cot の 0 のまわりの Laurent 展開は重要なので、よく調べられていて、一般項を表す公式が知られている (桂田 [1] の命題 7.17)。今回のような目的には一般項は必要ないので、上で説明したような冪級数の割り算を実行した。■

A　ちょっと講釈: sec, cosec, cot

(この部分は、2026/4/21 の講義に回した。)

三角関数というと、学校数学では sin, cos, tan の露出度が高いが、
sec(セカント), cosec(コセカント), cot(コタンジェント) というのもある:

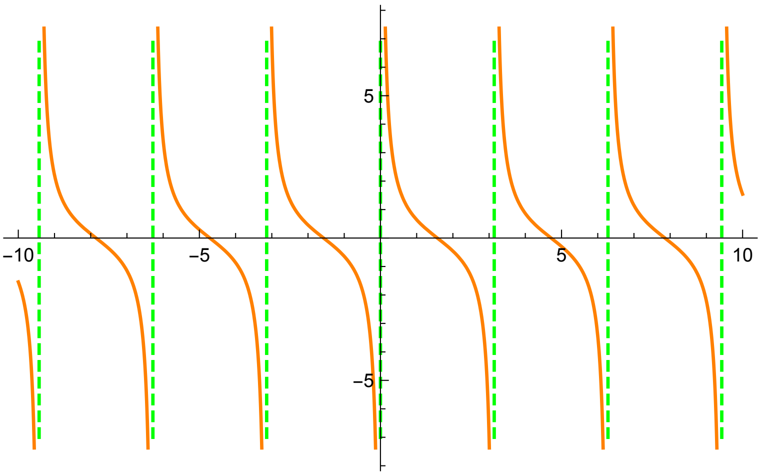
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

大昔の三角関数表には (Wikipedia の Trigonometric tables 等参照)、sin, tan, sec の値が載っていた。

cos(ine), cot(angent), cosec(ant) は、それぞれ余角の sin, tan, sec である:

$$\mathrm{co}\,某\,\theta = 某\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad (ゆえに数表はほとんど不要).$$

$y = \cot x$ のグラフは、$\cot x = \tan(\pi/2 - x)$ に気づくとすぐ分かる。



B　三角関数、双曲線関数の iz での値

板書では必要なものだけを書くのか。
(必要になったとき自分で導くものだろうけれど、書いてあると安心。)
よく知られた

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},$$
$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \cot z = \frac{1}{\tan z}, \quad \coth z = \frac{1}{\tanh z}.$$

から容易に次が導ける。

$$\cosh(iz) = \cos z, \quad \sinh(iz) = i\sin z, \quad \tanh(iz) = i\tan z,$$
$$\cos(iz) = \cosh z, \quad \sin(iz) = i\sinh z, \quad \tan(iz) = i\tanh z,$$
$$\coth(iz) = -i\cot z, \quad \cot(iz) = -i\coth z.$$

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 数学科での講義科目「関数論 2」の講義ノートあらため 現象数理学科の「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/complex-function.pdf (2008〜).

[2] 一松信：留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 (1979), 第 5 章は数値積分の高橋-森理論の解説。

[3] 神保道夫：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063 でアクセスできる.

[4] 桂田祐史：続 複素関数論,「複素関数」講義ノートの続き. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/zoku-complex-function.pdf (2015〜).