複素関数・同演習 宿題 No. 9　(2023年11月29日出題, 12月5日13:30までにPDF形式で提出)

__年__ 組____番　氏名________________　(解答は裏面も使用可, A4レポート用紙に書いても可)

問 9

(1) 複素数の範囲で次の各方程式を解け (ただし $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ とする)。

(a) $e^z = -e$　(b) $e^z = -1 - \sqrt{3}i$　(c) $\cos z = -1$　(d) $\sin z = 3i$　(e) $\tan z = i$

問 9 解説

(1) (a) $-e$ の極形式は $-e = e \cdot e^{i\pi}$. ゆえに

$$z = \log v = \log e + i(\pi + 2n\pi) = 1 + (2n+1)\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(b) $c := -1 - \sqrt{3}i$ とおく。$|c| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2.$

$$\frac{c}{|c|} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = e^{-\frac{2\pi}{3}i}$$

であるから、c の極形式は $c = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

$$z = \log c = \log 2 + (-2\pi/3 + 2n\pi)\,i = \log 2 + (2n - 2/3)\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(c) $X := e^{iz}$ とおくと、$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = (X + 1/X)/2$ であるから

$$\begin{aligned}\cos z = -1 &\Leftrightarrow \frac{X+1/X}{2} = -1 \Leftrightarrow X^2 + 1 = -2X \Leftrightarrow X^2 + 2X + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow (X+1)^2 = 0 \Leftrightarrow X = -1 \Leftrightarrow e^{iz} = 1 \cdot e^{i\pi}\\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad iz = \log 1 + (\pi + 2n\pi)i\\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad z = (2n+1)\pi.\end{aligned}$$

(d) $X := e^{iz}$ とおくと、$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \dfrac{X - 1/X}{2i}$ であるから

$$\begin{aligned}\sin z = 3i &\Leftrightarrow \frac{X-1/X}{2i} = 3i \Leftrightarrow X^2 - 1 = -6X \Leftrightarrow X^2 + 6X - 1 = 0\\ &\Leftrightarrow X = -3 \pm \sqrt{3^2 + 1 \cdot 1} = -3 \pm \sqrt{10} = (\sqrt{10} - 3)e^{i \cdot 0}, (3 + \sqrt{10})e^{i\pi}\\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad iz = \log\left(\sqrt{10} - 3\right) + i(0 + 2n\pi), \log\left(\sqrt{10}+3\right) + i(\pi + 2n\pi)\\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad z = 2n\pi - i\log\left(\sqrt{10}-3\right), (2n+1)\pi - i\log(\sqrt{10}+3).\end{aligned}$$

注:

$$-\log\left(\sqrt{10}-3\right) = \log\frac{1}{\sqrt{10}-3} = \log\frac{\sqrt{10}+3}{10-9} = \log\left(\sqrt{10}+3\right), \quad -\log\left(\sqrt{10}+3\right) = \log\left(\sqrt{10}-3\right)$$

であるから、次のようにも書いても良い。

$$z = 2n\pi + i\log\left(\sqrt{10}+3\right), (2n+1)\pi + i\log\left(\sqrt{10}-3\right) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(e) $X := e^{iz}$ とおくと、$\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \dfrac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i\dfrac{X - 1/X}{X + 1/X} = i\dfrac{1 - X^2}{1 + X^2}$ であるから

$$\tan z = i \Leftrightarrow i\frac{1-X^2}{1+X^2} = i \Leftrightarrow \frac{1-X^2}{1+X^2} = 1 \Leftrightarrow X^2 = 0 \Leftrightarrow X = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = 0.$$

指数関数は 0 という値を取らないので、この方程式の解は存在しない。