**複素関数・同演習 宿題 No. 7**　(2024 年 11 月 13 日出題, 11 月 19 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番　氏名____________　　(解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

**問 7**　(1), (2) は等比級数の和の公式を利用して解答すること。

(1) 次の各関数を 0 のまわりで冪級数展開し、その収束半径を求めよ。

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z+2}$　(b) $g(z) = \dfrac{5}{3z+4}$　(c) $h(z) = \dfrac{1}{(6z+7)^2}$

(d) $\varphi'(z) = \dfrac{1}{9-z}$, $\varphi(0) = 8$ を満たす $\varphi$　(e) $r(z) = \dfrac{6z^4 + 19z^3 - 21z^2 - 26z + 37}{z^3 + 2z^2 - 7z + 4}$

Mathematica で `Apart[ (6z^4+19z^3-21z^2-26z+37) /(z^3+2z^2-7z+4)]` として部分分数分解できる。(自分で部分分数分解して、検算してみること)

(2) $F(z) = \dfrac{1}{2+3z}$ を 4 のまわりで冪級数展開し、その収束円を求めよ。

**収束半径についてのまとめ**

- (収束半径の定義) $\rho \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ が $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ の収束半径であるとは、$\rho$ が

  $|z-c| < \rho$ ならば冪級数は収束し、$|z-c| > \rho$ ならば冪級数は発散する

  という条件を満たすことをいう。

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ が「$|z-c| < R \Rightarrow$ 収束する」を満たすならば、収束半径 $\rho$ は、$\rho \geq R$ を満たす。

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ が「$|z-c| < R \Leftrightarrow$ 収束する」を満たすならば、収束半径 $\rho$ は、$\rho = R$ を満たす。

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n$ の収束半径をそれぞれ $\rho_1$, $\rho_2$ とする。$\rho_1 \neq \rho_2$ ならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-c)^n$ の収束半径は $\min\{\rho_1, \rho_2\}$ である。$\rho_1 = \rho_2$ の場合、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-c)^n$ の収束半径は $\min\{\rho_1, \rho_2\}$ 以上である (真に大きい場合もありうる)。

- (Cauhy-Hadamard の公式) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ の収束半径 $\rho$ は

  $$\rho = \frac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

  を満たす。ただし $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$ とみなす。

- (ratio test, d'Alembert の判定法) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ に対して

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

  が確定する (収束するか、$+\infty$ に発散する) ならば、

  $$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

**問 7 解説**　「冪級数展開し」なのだから、冪級数の形 $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n)$ に変形することを求められているのに、最後がその形になっていない人が結構いた。例えば $\left(-\frac{3}{4}z\right)^n$ は、$\frac{(-3)^n}{4^n}z^n$ あるいは $\left(-\frac{3}{4}\right)^n z^n$ のようにして、$a_n$ と $(z-c)^n$ が混じらないようにすべき ($a_n$ がすぐに読み取れるように書こう、ということ)。$\left(\frac{1}{6z+7}\right)' = ((6z+7)^{-1})' = \frac{-6}{(6z+7)^2}$ の 6 を見落とす人が多かった。

**問 7 解答**

(1) 以下、考えている冪級数の収束半径を $\rho$ と表す。

(a) (最初の問題なので、ゆっくり変形する。慣れたら適宜スキップすれば良い。)

$$f(z) = \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2+z} = \frac{1}{2(1+z/2)} = \frac{1}{2\left[1-(-z/2)\right]} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n.$$

(等比級数であるから) 収束する $\Leftrightarrow$ | 公比 | $< 1 \Leftrightarrow |z/2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$ であるから、$\rho = 2$.

(b)

$$g(z) = \frac{5}{3z+4} = \frac{5}{4+3z} = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1+3z/4} = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{3z}{4}\right)} = \frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3z}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5\cdot(-3)^n}{4^{n+1}}z^n.$$

(等比級数であるから) 収束する $\Leftrightarrow$ | 公比 | $< 1 \Leftrightarrow |-3z/4| < 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4}|z| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{4}{3}$ であるから、$\rho = \frac{4}{3}$.

(c)

$$\frac{1}{6z+7} = \frac{1}{7(1+\frac{6}{7}z)} = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{6}{7}z\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-6)^n}{7^{n+1}}z^n.$$

これは等比級数であるから、収束する $\Leftrightarrow$ | 公比 | $< 1 \Leftrightarrow |-6z/7| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{7}{6}$. ゆえに、この冪級数の収束半径は $\frac{7}{6}$. (任意の) 冪級数は収束円の内部で項別微分が出来るから

$$-\frac{6}{(6z+7)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-6)^n}{7^{n+1}}nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-6)^{n+1}}{7^{n+2}}(n+1)z^n.$$

ゆえに

$$h(z) = -\frac{1}{6}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-6)^{n+1}}{7^{n+2}}(n+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-6)^n}{7^{n+2}}(n+1)z^n.$$

冪級数は項別微分しても収束半径は変わらないので、$\rho = \frac{7}{6}$.

(d)

$$\varphi'(z) = \frac{1}{9-z} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-z/9} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{9^{n+1}} \quad (収束半径は 9).$$

(任意の) 冪級数は収束円の内部で項別積分できることと、$\varphi(0) = 8$ であることから

$$\varphi(z) = 8 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)9^{n+1}} = 8 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{9^n n}.$$

冪級数は項別積分しても収束半径は変わらないので、$\rho = 9$.

(**注意**　$\varphi(z) = -\log|z-9| + \log 9 + 8$ と書いた人がいるが、それは微分可能な関数ではない。また $\varphi(z) = \log(9-z) - \log 9 + 8$ とした人もいるが、その場合は log の値 (分枝) をどう選ぶか書く必要がある。複素対数関数が無限多価関数であり、分枝というものを選ぶ必要があるというのは、この後の講義で説明する事項である。上の解答を見れば分かるように、この問を解くのに log は必要ない。)

(e) $r(z)$ を部分分数分解する。その計算の説明は後回しにして、結果を書くと

$$r(z) = 7 + 6z + \frac{5}{z+4} + \frac{2}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2}.$$

$a \neq 0$ に対して、等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-z/a} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^{n+1}}z^n.$$

この級数が収束する $\Leftrightarrow$ | 公比 | $< 1 \Leftrightarrow |z/a| < 1 \Leftrightarrow |z| < |a|$. ゆえに収束半径は $|a|$. ゆえに

$$\frac{1}{z+4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^n \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 4 \text{ であるから収束半径} = 4).$$

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 1 \text{ であるから収束半径} = 1).$$

後者を項別微分することで (このとき収束半径が変わらないことに注意)

$$\frac{1}{(z-1)^2} = -\left(\frac{1}{z-1}\right)' = -\left(-\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \quad (\text{収束半径} = 1).$$

ゆえに

$$\begin{aligned} r(z) &= 7 + 6z + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5(-1)^n}{4^{n+1}}z^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+1)z^n \\ &= 7 + 6z + \frac{5}{4} - \frac{5}{16}z - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{5(-1)^n}{4^{n+1}}z^n - 2 - 2z - \sum_{n=2}^{\infty} 2z^n + 3 + 6z + \sum_{n=2}^{\infty} 3(n+1)z^n \\ &= \frac{37}{4} + \frac{155}{16}z + \sum_{n=2}^{\infty}\left(3n + 1 + \frac{5(-1)^n}{4^{n+1}}\right)z^n. \end{aligned}$$

($f$ の定義式を見て $f(0) = \dfrac{37}{4}$ — この種の検算をお勧めする。)

さて収束半径の計算であるが、実はちょっと難しい[1]。ratio test (d'Alembert の判定法) を使おう。

$$a_n := 3n + 1 + \frac{5(-1)^n}{4^{n+1}}$$

とおくとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1+5(-1)^n/4^{n+1}}{3n+4+5(-1)^{n+1}/4^{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}+\frac{5}{n}(-1)^n/4^{n+1}}{3+\frac{4}{n}+\frac{5}{n}(-1)^{n+1}/4^{n+2}} = \frac{3}{3} = 1$$

であるから、収束半径は 1 である。

[1]「$\sum_n a_n(z-c)^n$, $\sum_n b_n(z-c)^n$ の収束半径がそれぞれ $\rho_1$, $\rho_2$ で、$\rho_1 \neq \rho_2$ ならば $\sum_n (a_n+b_n)(z-c)^n$ の収束半径は $\min\{\rho_1, \rho_2\}$ である」という定理は成り立つが、条件 $\rho_1 \neq \rho_2$ が満たされない場合は、収束半径が $\min\{\rho_1, \rho_2\}$ であるとは限らない。この問題の場合、収束半径が 1, 1, 4 の冪級数の和であるから、$\rho$ が 1 以上であることは分かるが、$\rho = 1$ であることはすぐには結論できない。少し後で学ぶことを使うと、「$f$ は $\mathbb{C}\setminus\{1,4\}$ で正則で、1 と 4 は $f$ の極であるから、$f$ の 0 の周りの冪級数展開の収束半径は、0 と $\{1,4\}$ との距離 1 に等しい」という議論ができて明快であるが、現時点では不可能である。

**$r(z)$ の部分分数分解**　$r(z)$ の分子 $n(z) := 6z^4+19z^3-21z^2-26z+37$ を分母 $d(z) := z^3+2z^2-7z+4$ で割ると、商が $6z+7$, 余りが $7z^2-z+9$. つまり

$$n(z) = d(z)(6z+7) + 7z^2 - z + 9.$$

ゆえに

$$r(z) = \frac{n(z)}{d(z)} = \frac{(6z+7)d(z) + 7z^2 - z + 9}{d(z)} = 6z + 7 + \frac{7z^2 - z + 9}{d(z)}.$$

$d(z) = (z-1)^2(z+4)$ であるから

$$\frac{7z^2 - z + 9}{d(z)} = \frac{A}{z+4} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}$$

を満たす定数 $A$, $B$, $C$ が存在する。分母を払った

$$7z^2 - z + 9 = A(z-1)^2 + B(z-1)(z+4) + C(z+4)$$

は恒等式である。
$z = 1$ を代入して $15 = 5C$ より $C = 3$.
$z = -4$ を代入して $125 = 25A$ より $A = 5$.
最高次の係数を比較して $7 = A + B$ より $B = 2$.
ゆえに

$$r(z) = 6z + 7 + \frac{5}{z+4} + \frac{2}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2}$$

Mathematica の利用

```
q[z_]:=6z^4+19z^3-21z^2-26z+37
p[z_]:=z^3+2z^2-7z+4
```

　$q(z)$ を $p(z)$ で割った商と余りを求めるには

```
PolynomialQuotientRemainder[q[z],p[z],z]
```

　$q(z)/p(z)$ の部分分数分解を求めるには、割り算を飛ばして

```
Apart[q[z]/p[z]]
```

とすれば良い。

　$q(z)/p(z)$ を 0 の周りに冪級数展開したときの $n$ 次の項の係数は

```
SeriesCoefficient[q[z]/p[z],{z,0,n}]
```

で求まる。

In[43]:= `q[z_] := 6 z^4 + 19 z^3 - 21 z^2 - 26 z + 37`
`p[z_] := z^3 + 2 z^2 - 7 z + 4`

`PolynomialQuotientRemainder[q[z], p[z], z]`
多項式を割った商と剰余

Out[45]= $\{7 + 6 z, 9 - z + 7 z^2\}$

In[46]:= `Apart[q[z] / p[z]]`
有理式の部分分数分解

Out[46]= $7 + \frac{3}{(-1+z)^2} + \frac{2}{-1+z} + 6 z + \frac{5}{4+z}$

In[48]:= `SeriesCoefficient[q[z] / p[z], {z, 0, n}]`
級数の係数

Out[48]= $\begin{cases} \frac{1}{4}\left(4 + 5\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 12 n\right) & n > 1 \\ \frac{155}{16} & n == 1 \\ \frac{37}{4} & n == 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$

(2)

$$F(z) = \frac{1}{2+3z} = \frac{1}{2+3(z-4+4)} = \frac{1}{14+3(z-4)} = \frac{1}{14}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{14}(z-4)} = \frac{1}{14}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{14}(z-4)\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{14^{n+1}}(z-4)^n.$$

等比級数であるから、

$$\text{収束する} \Leftrightarrow |\,\text{公比}\,| < 1 \Leftrightarrow \left|-\frac{3}{14}(z-4)\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{3}{14}\,|z-4| < 1 \Leftrightarrow |z-4| < \frac{14}{3}.$$

ゆえに収束円は $D\left(4; \frac{14}{3}\right)$. ■