複素関数・同演習 宿題 No. 6 (2023 年 10 月 31 日出題, 11 月 14 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番　氏名_____________ (解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 6 (1) 優級数の定理を書け。(注意: 同名で内容の異なるものがある。複素数列版を書くこと。)

(2) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ において、ある実定数 M が存在して $(\forall n \geq 0)\ |a_n| \leq M$ が成り立つならば、$|z| < 1$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ に対してこの冪級数が収束することを示せ (ヒント: 優級数の定理)。この場合に、この冪級数の収束半径 ρ について何が分かるか。

(3) 以下の各 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ (ヒント: グラフを描いてみよう)。結果だけで良い。

(a) $f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} nx & (-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}) \\ 1 & (\frac{1}{n} \leq x \leq 1) \\ -1 & (-1 \leq x \leq -\frac{1}{n}) \end{cases}$

(b) $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n\ (x \in [0,1])$

(c) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = f(x-n)\ (x \in \mathbb{R}),\ f(x) = e^{-x^2}$

(d) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = f(nx)\ (x \in \mathbb{R}),\ f(x) = e^{-x^2}$

(e) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = f(x/n)\ (x \in \mathbb{R}),\ f(x) = e^{-x^2}$