複素関数・同演習 宿題 No. 6 (2023 年 10 月 31 日出題, 11 月 14 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番 氏名______________ (解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 6 (1) 優級数の定理を書け。(注意: 同名で内容の異なるものがある。複素数列版を書くこと。)

(2) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ において、ある実定数 M が存在して $(\forall n \geq 0)\ |a_n| \leq M$ が成り立つならば、$|z| < 1$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ に対してこの冪級数が収束することを示せ (ヒント: 優級数の定理)。この場合に、この冪級数の収束半径 ρ について何が分かるか。

(3) 以下の各 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ (ヒント: グラフを描いてみよう)。結果だけで良い。

(a) $f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} nx & (-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}) \\ 1 & (\frac{1}{n} \leq x \leq 1) \\ -1 & (-1 \leq x \leq -\frac{1}{n}) \end{cases}$

(b) $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n\ (x \in [0,1])$

(c) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = f(x-n)\ (x \in \mathbb{R}),\ f(x) = e^{-x^2}$

(d) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = f(nx)\ (x \in \mathbb{R}),\ f(x) = e^{-x^2}$

(e) $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = f(x/n)\ (x \in \mathbb{R}),\ f(x) = e^{-x^2}$

問 6 解答

(1) 複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して、

$$\text{(i) } (\forall n\in\mathbb{N})\ |a_n|\le b_n \qquad \text{(ii) } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ は収束する},$$

という 2 条件を満たす $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在するならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する。

(2) $|z|<1$ とする。$A_n := a_n z^n$, $b_n := M|z|^n$ とおくと、任意の n に対して

$$|A_n| = |a_n z^n| = |a_n|\,|z|^n \le M|z|^n = b_n.$$

また

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} M|z|^n = \frac{M}{1-|z|} \quad (\text{等比級数で、公比} = |z| < 1 \text{ であるので、}|\text{公比}| < 1 \text{ を満たす})$$

であるから、優級数の定理により $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束する (当然収束する)。

$\rho \ge 1$ であることが分かる。

(図を描いて「分かる」人もいるだろうが、以下では論理的に示す。)

もし $\rho < 1$ ならば $|z|<1$ を満たす z で収束することに矛盾する ($\rho' := \frac{1+\rho}{2}$ とおくと、$\rho < \rho' < 1$. $z=\rho'$ において $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ を考えると、$|z|>\rho$ であるから発散するが、一方 $|z|<1$ であるから収束する。) ゆえに $\rho \ge 1$. ■

($\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$ のように、$M=1$ について $|a_n| = \frac{1}{3^n} \le M$ を満たすので、$|z|<1$ で収束するけれど、収束半径は 3 で 1 より大きい、というものある。)

(3) (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x>0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x=0 \text{ のとき}) \\ -1 & (x<0 \text{ のとき}) \end{cases}$

すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して、$\dfrac{1}{n}\le x\le 1$ ならば $f_n(x)=1$, $-1\le x\le -\dfrac{1}{n}$ ならば $f_n(x)=-1$, $f_n(0)=0$ であることから導かれる。

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (0\le x<1 \text{ のとき}) \\ 1 & (x=1 \text{ のとき}) \end{cases}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n$ については、r が実数の場合は高校以来知っているはず。$-1<r<1$ ならば 0 に収束、$r=1$ ならば 1 に収束、その他は発散する。複素数の場合も $|r|<1$ ならば 0 に収束、$r=1$ ならば 1 に収束、その他は発散する。

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

任意の x に対して $n\to\infty$ のとき $(x-n)^2\to\infty$, $\displaystyle\lim_{y\to\infty} e^{-y}=0$ であるから、$f_n(x)=e^{-(x-n)^2}\to 0$.

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (x\ne 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x=0 \text{ のとき}) \end{cases}$

$x>0$ の場合 $n\to\infty$ のとき $nx\to\infty$, $x<0$ の場合 $n\to\infty$ のとき $nx\to-\infty$, $x=0$ の場合 $n\to\infty$ のとき $nx\to 0$ に注意する。

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1.$

$n\to\infty$ のとき $x/n\to 0$ に注意する。

問 6 解説

- (1) で次のような解答が多かった。

  「任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \le a_n \le b_n$, かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。」

  確かにこの定理も優級数の定理と呼ばれることがあるけれど、この授業で紹介した優級数の定理はこれではない。この授業では複素数を扱うので、正項級数についての定理は直接的には役に立たない。授業中に説明した定理を書くように。そもそも授業の復習用の宿題なのだから、授業内容を振り返るのが当然である。

- (2) について。$a_n(z-c)^n \le M|z-c|^n$ のような、左辺に虚数になる可能性がある不等式を書いた人が少なくない。「虚数は大小比較できない」を改めて頭に刻み込んで下さい。

- (2) について。「公比が 1 より小さいので収束」と書いた人がいるが、数学 III のときでも (実数の範囲でも) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ の収束条件は $-1 < r < 1$ である。例えば $r = -2$ は $r < 1$ を満たすけれど、等比級数は収束しない。収束のための条件は $r < 1$ でなく $|r| < 1$ である。「$|$公比$| < 1$ を満たすので」とか「公比 $= |z-c| < 1$ であるから (公比が 0 以上であることが明瞭に分かる)」のようにすること。

- これまでに例として登場した冪級数で、$|a_n| \le M$ を満たす M が存在するものは多い。$a_n = 1$ とか、$a_n = \dfrac{1}{(n+2)^3}$ とか、$a_n = \begin{cases} 1 & (n = k^2 \text{ を満たす } k \in \mathbb{N} \text{ が存在}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$ とか。$a_n = \dfrac{1}{3^n}$ もそうだ。こういう場合冪級数は $|z-c| < 1$ で収束する。もしも $|z-c| > 1$ で発散することが分かれば $\rho = 1$ であるが、一般には $\rho \ge 1$ としか言えない。

- 苦し紛れなのか

  $$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

  という式を書いた人がいる。この式は無条件では成り立たないので、いきなり書いてはいけない。

  一方、$\rho = \dfrac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ という式の方は使えなくもない。$\sqrt[n]{|a_n|} \le \sqrt[n]{M}$ で、$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{M} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M} = 1$ であるから (最後の極限証明できます？)、$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le 1$. ゆえに $\rho \ge \frac{1}{1} = 1$.