複素関数・同演習 宿題 No. 5　(2023 年 10 月 25 日出題, 10 月 31 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番　氏名______________　(解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 5　(1) ρ $(0 \leq \rho \leq +\infty)$ が $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径であるとはどういうことか説明せよ。

(2) 次の冪級数 (a)–(e) の収束半径と収束円を求めよ。

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{(n+1)^2}$　(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{4^n}(z+6)^n$　(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(7n)!z^n$　(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^9(z-10)^{11n+1}}{(-8)^n}$　(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$

問 5 解説

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が、$|z-c|<\rho$ ならば収束し、$|z-c|>\rho$ ならば発散すること。

(2) 冪級数の中心を c, 第 n 項の係数を a_n, 収束半径を ρ と書くことにする。

(a) $c=3$, $a_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{(1+0)^2}{(1+0)^2}=1.$$

ゆえに収束半径は 1, 収束円は $D(3;1)$.

(b) $c=-6$, $a_n=\dfrac{n^5}{4^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^5}{4^n}\cdot\frac{4^{n+1}}{(n+1)^5}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{(1+1/n)^5}=4.$$

ゆえに収束半径は 4, 収束円は $D(-6;4)$.

(c) $c=0$, $a_n=(7n)!$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(7n)!}{(7(n+1))!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(7n+7)(7n+6)(7n+5)(7n+4)(7n+3)(7n+2)(7n+1)}=0.$$

ゆえに収束半径は 0, 収束円は $D(0;0)=\emptyset$.

(d) $\zeta:=(z-10)^{11}$ とおくと

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^9(z-10)^{11n+1}}{(-8)^n}=(z-10)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^9(z-10)^{11n}}{(-8)^n}=(z-10)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^9\zeta^n}{(-8)^n}.$$

右辺の ζ についてのベキ級数は、中心 0, 係数 $b_n:=\dfrac{n^9}{(-8)^n}$ であり、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|b_n|}{|b_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|n^9|}{|(-8)^n|}\frac{|(-8)^{n+1}|}{(n+1)^9}=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{(1+1/n)^9}=8$$

であるから収束半径は 8. ゆえに

$|\zeta|<8$ ならば収束し、$|\zeta|>8$ ならば発散する。

ゆえに与えられた冪級数は

$|(z-10)^{11}|<8$ ならば収束し、$|(z-10)^{11}|>8$ ならば発散する。
(言い換えると、$|z-10|<\sqrt[11]{8}$ ならば収束し、$|z-10|>\sqrt[11]{8}$ ならば発散する。)

ゆえに、収束半径は $\sqrt[11]{8}$, 収束円は $D\left(10;\ \sqrt[11]{8}\right)$.

(e) $c=0$, $a_n:=\begin{cases}1 & (n=k!\ \text{となる}\ k\in\mathbb{N}\ \text{が存在するとき})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$ とおくと、与えられた級数は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ と表せる。(ゆえに冪級数である。)

$|z|<1$ ならば任意の n に対して $|a_nz^n|\le|z|^n$、かつ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|z|^n$ は収束するので、優級数の定理より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ は収束する。

一方 $|z| \geq 1$ のとき、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、$n := N!$ とおくと、$n \geq N$ かつ $|a_n z^n| = |z^n| \geq 1$ が成り立つから、第 n 項は 0 に収束しない。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束しない。

(別解) $a_n = 1$ または $a_n = 0$ であるから、$\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$. 一方、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、$n = N!$ とすると、$n \geq N$ かつ $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$. ゆえに

(a) $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)$ $\sqrt[n]{|a_n|} < 1 + \varepsilon$.

(b) $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\forall N \in \mathbb{N})$ $(\exists n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)$ $\sqrt[n]{|a_n|} > 1 - \varepsilon$.

が成り立つ。ゆえに

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

ゆえに収束半径は $\dfrac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$. 収束円は $D(0;1)$.■

(別解の別解) $\left|\sqrt[n]{|a_n|}\right|$ は 1 または 0 で、$= 1$ となる n は無限にたくさんあるので

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geq n} \sqrt[n]{|a_k|} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

ゆえに収束半径は $\dfrac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$. 収束円は $D(0;1)$.■

注意

- (細かいことだと思うかもしれないが) 収束半径$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ がつねに成り立つわけではないので、

  $$収束半径 = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \cdots$$

  と書き出すのは良くない。

  $$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \cdots = 何か$$

  を得てから (極限が求まるか、$= +\infty$ になるかを確認してから)

  $$\therefore \quad 収束半径 = 何か$$

  と書くべきである。

- (2) で「$(\exists \rho\colon\ 0 \leq \rho \leq \infty)$ $(|z - c| < \rho \Rightarrow$ 収束$) \wedge$ $(|z - c| > \rho \Rightarrow$ 発散$)$」とだけ書いた人がいるが、ρ は問題文中にあるのだから、$\exists \rho$ を書くのはおかしい。後に「この ρ を収束半径と呼ぶ。」と書くなら OK.

- 収束半径が負になる、明らかにおかしい結果を書く人がいる。収束半径に z を入れる人も (その z は一体何？)。

- (e) はちょっと難しいかな。