複素関数・同演習 宿題 No. 4　(2023 年 10 月 18 日出題, 10 月 24 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番　氏名______________　(解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 4

(1) この講義では、$z \in \mathbb{C}$ に対して、$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ (ただし $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$) として指数関数を定義した。$(e^z)' = e^z$ であることを示せ。(ヒント: Cauchy-Riemann 方程式を満たすか調べよう。)

(2) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = (\overline{z})^2$ とするとき、f の微分可能性を調べよ。(ヒント: 微分可能な点も存在する。)

(3) Ω は $\mathbb{C}$ の領域、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、f の実部・虚部を u, v とするとき、以下の問に答えよ。
(a) v は調和関数であることを示せ。(b) v の共役調和関数を求めよ。

問 4 解答

(1) (方法 1) $f(z) := e^z$ の実部 u, 虚部 v は

$$u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y.$$

ともに $\mathbb{R}^2$ で偏微分可能である。実際

$$u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y, \quad v_x = e^x \sin y, \quad v_y = e^x \cos y.$$

これら偏導関数は連続である。ゆえに u, v は C^1 級であるから (全) 微分可能である。

さらに Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つので、f は $\mathbb{C}$ で正則である。

先週の講義で示したように ($f' = u_x + iv_x = \frac{1}{i}(u_y + iv_y)$ の左半分) 一般に正則関数 f に対して

$$f'(x+yi) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$$

が成り立つ。ゆえに

$$f'(x+yi) = e^x \cos y + ie^x \sin y = f(x+yi).$$

すなわち $f'(z) = f(z) = e^z$. ■

(方法 2) 複素指数関数についても指数法則は証明してあるので、任意の $z \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{e^{z+h}-e^z}{h} = \frac{e^z e^h - e^z}{h} = e^z \frac{e^h - 1}{h}.$$

(この後 $\dfrac{e^h-1}{h} \to 1$ を示すことで証明完了となるが、意外と面倒である。冪級数について準備をすると簡単に解決するので、以下に一応書いておくが、授業では省略した。)

$h = h_x + ih_y$ $(h_x, h_y \in \mathbb{R})$ とおくと、$h \to 0$ のとき $(h_x, h_y) \to (0,0)$ である。

$$\frac{e^h-1}{h} - 1 = \frac{1}{h}\left(e^{h_x}(\cos h_y + i \sin h_y) - 1 - (h_x + ih_y)\right) = \frac{R+iI}{h}.$$

ただし

$$R := e^{h_x}\cos h_y - 1 - h_x, \quad I := e^{h_x} \sin h_y - h_y$$

とおいた。

$$R = e^{h_x}\cos h_y - e^{h_x} + e^{h_x} - (1+h_x) = e^{h_x}(\cos h_y - 1) + e^{h_x} - (1+h_x).$$

$$e^{h_x} = O(h_x), \quad \cos h_y - 1 = O(h_y^2), \quad e^{h_x} - (1+h_x) = O(h_x^2) \quad ((h_x,h_y) \to (0,0))$$

であるから

$$R = O\left(h_x^2 + h_y^2\right) \quad ((h_x,h_y) \to (0,0)).$$

また

$$I = e^{h_x}\sin h_y - \sin h_y + \sin h_y - h_y = \left(e^{h_x} - 1\right)\sin h_y + \sin h_y - h_y.$$

$$e^{h_x} - 1 = O(h_x), \quad \sin h_y = O(h_y), \quad \sin h_y - h_y = O(h_y^3)$$

であるから

$$I = O(h_x)O(h_y) + O(h_y^3) \quad ((h_x,h_y) \to (0,0)).$$

$$|h_x h_y| \le h_x^2 + h_y^2, \quad h_y^3 = |h_y|\left(h_x^2 + h_y^2\right)$$

であるから

$$I = O\left(h_x^2 + h_y^2\right).$$

ゆえに

$$\left|\frac{e^h - 1}{h} - 1\right| = \frac{O\left(h_x^2 + h_y^2\right)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = O\left(\sqrt{h_x^2 + h_y^2}\right) \quad ((h_x, h_y) \to (0,0)).$$

ゆえに

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

ゆえに

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = e^z \cdot 1 = e^z.$$

ゆえに f は $\mathbb{C}$ で正則であり、$(e^z)' = e^z$。■

(2) (方法 1) f の実部・虚部をそれぞれ u, v とする。

$$f(x+iy) = \left(\overline{x+yi}\right)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi.$$

であるから

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = -2xy.$$

これらは (多項式関数であるから) $\mathbb{R}^2$ で C^∞ 級である。ゆえに (全) 微分可能である。

Cauchy-Riemann 方程式を満たすかチェックしよう。

$$u_x(x,y) = 2x, \quad u_y(x,y) = -2y, \quad v_x(x,y) = -2y, \quad v_y(x,y) = -2x.$$

- $(x,y) = (0,0)$ のとき、$u_x = 0 = v_y$ かつ $u_y = 0 = -v_x$ が成り立つので、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ。ゆえに f は 0 で微分可能である。
- $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ のとき、$x \neq 0$ または $y \neq 0$ である。$x \neq 0$ のときは $u_x \neq v_y$, $y \neq 0$ のときは $u_y \neq -v_x$. いずれの場合も Cauchy-Riemann 方程式は成り立たない。ゆえに $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ において f は微分可能ではない。

(方法 2) $z \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とするとき

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\left(\overline{z+h}\right)^2 - \overline{z}^2}{h} = \frac{\overline{z}^2 + 2\overline{z}\overline{h} + \overline{h}^2 - \overline{z}^2}{h} = \frac{2\overline{z}\overline{h} + \overline{h}^2}{h} = 2\overline{z}\frac{\overline{h}}{h} + \frac{\overline{h}^2}{h}.$$

準備として

(a) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}$ は存在しない。

確認

> $h = h_x + ih_y$ で、$h_y = 0$ として $h_x \to 0$ と近づけると $\frac{\overline{h}}{h} = \frac{h_x}{h_x} = 1 \to 1$, $h_x = 0$ として $h_y \to 0$ と近づけると $\frac{\overline{h}}{h} = \frac{-ih_y}{ih_y} = -1 \to -1$. 両者が食い違うので、$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}$ は存在しない。

(b) 一方、$\frac{\overline{h}^2}{h} \to 0$. 実際 $\left|\frac{\overline{h}^2}{h}\right| = |h| \to 0$ $(h \to 0)$.

- $z = 0$ の場合、$\dfrac{f(z+h) - f(z)}{h} = \dfrac{\overline{h}^2}{h} \to 0$ $(h \to 0)$ であるから、f は 0 で微分可能である。

- $z \neq 0$ の場合、$\lim_{h\to 0}\dfrac{\overline{h}}{h}$ は存在せず $\lim_{h\to 0}\dfrac{\overline{h}^2}{h} = 0$ であるから、$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$ は存在しない。ゆえに f は z で微分可能でない。

(この方法 2 は、(h が実数の場合、純虚数の場合と考える点で) 結局は Cauchy-Riemann 方程式の 1 つの導出法に近い。別解と言えないしれない、と私は思う。)

(3) (a) 実は正則関数は何回でも微分可能なので (これを授業で証明するのはずっと後)、u と v は C^∞ 級である。また Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つので

$$v_{xx} + v_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = 0.$$

(最後の等号が成り立つのは、u が C^2 級であるので、2 階導関数が偏微分の順序によらないことによる。)

(b) $U := v$ とおく。任意の関数 V が U の共役調和関数であるために、V は C^2 級かつ $\triangle V = 0$ かつ

$$(*) \qquad U_x = V_y, \quad U_y = -V_x.$$

$U_x = v_x = -u_y$, $U_y = v_y = -u_x$ を $(*)$ に代入して

$$-u_y = V_y, \quad u_x = -V_x.$$

すなわち

$$\frac{\partial}{\partial x}(V+u) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(V+u) = 0.$$

これは

$$(\exists C \in \mathbb{R}) \quad V + u = C$$

と同値である。以上から

$$(*) \Leftrightarrow (\exists C \in \mathbb{R}) \quad V = -u + C.$$

この V は C^2 級かつ $\triangle V = 0$ を満たす。ゆえに $V = -u + C$ (C は実定数).■

($-if = -i(u+iv) = v - iu$ であるので、$-if$ の虚部 + 定数、ということである。)