複素関数・同演習 宿題 No. 3　(2023 年 10 月 11 日出題, 10 月 17 日 (火)13:30 までに Oh-o! Meiji に提出)

__年__ 組____番　氏名______________　(解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 3　(1) i の 3 乗根を求めよ。

(2) 以下の各 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ に対して、f の実部・虚部 u, v を求めよ。(b) と (c) については、偏微分して、Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つことを確かめよ。

(a) $f(z) = z^4$ $(\Omega = \mathbb{C})$　(b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ $(\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\})$　(c) $f(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ $(\Omega = \mathbb{C})$

問 3 解説

(1) $i = 1 \cdot e^{i\pi/2}$ は i の極形式であるから、i の 3 乗根は

$$e^{i\left(\frac{\pi/2}{3}+\frac{2\pi}{3}k\right)} \quad (k=0,1,2) = e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, -i.$$

(2) Cauchy-Riemann 方程式は間違えのない形で覚えること (間違えて、定期試験で大減点という悲劇が起こる)。書くことを強く勧める。

(a)

$$f(x+iy) = (x+iy)^4 = x^4 + 4x^3(iy) + 6x^2(iy)^2 + 4x(it)^3 + (iy)^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + (4x^3y - 4xy^3)i$$

であるから、f の実部・虚部 u, v は

$$u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4, \quad v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3.$$

(これ以降は今回は要求しなかった。) ゆえに

$$u_x = 4x^3 - 12xy^2, \quad u_y = -12x^2y + 4y^3, \quad v_x = 12x^2y - 4y^3, \quad v_y = 4x^3 - 12xy^2.$$

確かに $\mathbb{R}^2$ 全体で Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たす。

(b) (分母・分子に分母の共役複素数をかけて分母を実数化. $a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ の形にする。)

$$f(x+iy) = \frac{1}{(x+iy)^2} = \frac{(x-iy)^2}{(x+iy)^2(x-iy)^2} = \frac{x^2-y^2-2xyi}{(x^2+y^2)^2}$$

であるから、f の実部・虚部 u, v は

$$u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad v(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

(これ以降は今回は要求しなかった。) ゆえに (商の微分 $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$ の計算をする)

$$u_x(x,y) = \frac{-2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad u_y(x,y) = \frac{2y(-3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3},$$
$$v_x(x,y) = \frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad v_y(x,y) = \frac{-2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

確かに $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たす。

(c) 実は $f(z) = \cos z$ であるが (ずっと後で説明する)、解答するためには必要ない。複素指数関数の定義 $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ を用いてていねいに計算. 双曲線関数 $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$, $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ を使うと式が簡単になって楽。使えるようにしておこう。

$$f(x+yi) = \frac{e^{i(x+yi)} + e^{-i(x+yi)}}{2} = \frac{1}{2}(e^{-y+ix} + e^{y-ix}) = \frac{1}{2}\left[(e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^y(\cos x - i\sin x)\right]$$
$$= \frac{\cos x(e^y + y^{-y})}{2} + i\frac{(e^{-y} - e^y)\sin x}{2} = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y.$$

であるから、f の実部・虚部 u, v は

$$u(x,y) = \cos x\cosh y, \quad v(x,y) = -\sin x\sinh y.$$

ゆえに ($(\cosh)' = \sinh$, $(\sinh)' = \cosh$ という公式を用いて)

$$u_x = -\sin x\cosh y, \quad u_y = \cos x\sinh y, \quad v_x = -\cos x\sinh y, \quad v_y = -\sin x\cosh y.$$

確かに $\mathbb{R}^2$ 全体で Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たす。 ■

Mathematicaで検算

```
f[z_]:=z^4
ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]
ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]
u[x_,y_]:=ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]
v[x_,y_]:=ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]
D[u[x,y],{{x,y}}]
D[v[x,y],{{x,y}}]

f[z_]:=1/z^2
Simplify[ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]]
Simplify[ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]]
u[x_,y_]:=Simplify[ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]]
v[x_,y_]:=Simplify[ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]]
Simplify[D[u[x,y],{{x,y}}]]
Simplify[D[v[x,y],{{x,y}}]]

f[z_]:=(Exp[I z]+Exp[-I z])/(2) あるいは f[z_]:=Sin[z]
Simplify[ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]]
Simplify[ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]]
u[x_,y_]:=Simplify[ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]]
v[x_,y_]:=Simplify[ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]]
Simplify[D[u[x,y],{{x,y}}]]
Simplify[D[v[x,y],{{x,y}}]]
```