複素関数・同演習 練習問題　(2024 年 1 月 16 日, 提出する必要はない)

1 月 16 日の授業で (1) と (3) の類題は解説しますが、(2) はカットするかも。その場合 (2) は試験範囲外。

__年__ 組____番　氏名____________

問 14　次の定積分の値を求めよ。(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^4}$　(2) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^4+1}dx$　(3) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{3+\cos\theta}$

問 14 解説

(1) $f(z) := \dfrac{z^2}{(z^2+1)^4}$, $P(z) := (z^2+1)^4$, $Q(z) := 1$ とおくと $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ かつ $\deg P(z) = 8 \geq 2 = \deg Q(z) + 2$, $f(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$. さらに任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $P(x) = (x^2+1)^4 \geq (0+1)^4 = 1$ であるから $P(x) \neq 0$. ゆえに授業で説明した定理が使えて

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4} = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c).$$

P, Q ともに $\mathbb{C}$ 全体で正則である。$P(z) = (z+i)^4(z-i)^4$ であるから、P の零点は $c = \pm i$ であり、ともに位数は 4. $Q(\pm i) = 1 \neq 0$ であるから、これらは $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)^4(z-i)^4}$ の 4 位の極である。このうち $\operatorname{Im} c > 0$ であるものは $c = i$. ゆえに

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f; i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{(4-1)!} \lim_{z \to i} \left(\frac{d}{dz}\right)^{4-1} \left[(z-i)^4 \cdot \frac{1}{(z-i)^4(z+i)^4}\right] = \frac{2\pi i}{3!} \lim_{z \to i} \left((z+i)^{-4}\right)'''$$

$$= \frac{2\pi i}{6} \cdot (-4)(-5)(-6)\,(z+i)^{-7}\Big|_{z=i} = -2 \cdot 4 \cdot 5\pi i \cdot \frac{1}{(2i)^7} = \frac{5\pi}{2^4} = \frac{5\pi}{16}.$$

(2) 被積分関数は偶関数であること、$x \in \mathbb{R}$ のとき $\dfrac{x \sin x}{x^4+1} = \operatorname{Im} \dfrac{xe^{ix}}{x^4+1}$ であることから、

$$I := \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^4+1} dx.$$

$P(z) := z^4 + 1$, $Q(z) := z$ とおくと、$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) = 4 \geq 2 = \deg Q(z) + 1$, $\dfrac{xe^{ix}}{x^4+1} = \dfrac{Q(x)}{P(x)} e^{ix}$. さらに任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、$P(x) = (x^4+1) \geq 0 + 1 = 1$ であるから $P(x) \neq 0$. ゆえに授業で説明した定理が使えて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^4+1} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{z^4+1}; c\right).$$

P, Q, e^{iz} は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。P の零点は $z^4 = -1$ の解であるから、

$$z = e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}, e^{i5\pi/4}, e^{i7\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

どれも位数は 1. このとき分子は 0 ではないので、いずれも被積分関数の 1 位の極であり、これら以外に特異点は存在しない。このうち $\operatorname{Im} c > 0$ であるものは $c_1 := e^{i\pi/4}$, $c_2 := e^{i3\pi/4}$.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{z^4+1}; c_j\right) = \frac{ze^{iz}}{(z^4+1)'}\bigg|_{z=c_j} = \frac{ze^{iz}}{4z^3}\bigg|_{z=c_j} = \frac{c_j^2 e^{ic_j}}{4 \cdot c_j^4} = -\frac{c_j^2 e^{ic_j}}{4}.$$

$j = 1$ のとき $c_j^2 = e^{i\pi/2} = i$ であるから

$$\operatorname{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{z^4+1}; c_j\right) = \frac{-i}{4} e^{i(1+i)/\sqrt{2}} = \frac{1}{4} e^{-\sqrt{2}} \left(\sin\frac{1}{\sqrt{2}} - i\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$j = 2$ のとき $c_j^2 = e^{i3\pi/2} = -i$ であるから

$$\operatorname{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{z^4+1}; c_j\right) = \frac{i}{4} e^{i(-1+i)/\sqrt{2}} = \frac{1}{4} e^{-\sqrt{2}} \left(\sin\frac{1}{\sqrt{2}} + i\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^4+1}dx = 2\pi i\left(\mathrm{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{z^4+1}; c_1\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{z^4+1}; c_2\right)\right) = 2\pi i\cdot\frac{1}{4}e^{-\sqrt{2}}\cdot 2\sin\frac{1}{\sqrt{2}} = \pi i e^{-\sqrt{2}}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ゆえに $I = \dfrac{\pi}{2}e^{-\sqrt{2}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(3)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+\cos\theta}$$

$z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とおくと、$dz = ie^{i\theta}d\theta$ であるから $d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$. また

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+1/z}{2}$$

であるから

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{3+\frac{1}{2}(z+1/z)}\cdot\frac{dz}{iz} = -2i\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+6z+1}.$$

留数定理によって

$$I = -2i\cdot 2\pi i\sum_{|c|<1}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+6z+1}; c\right).$$

$c^2+6c+1=0$ の解 $c = -3\pm 2\sqrt{2}$ のうち、$-3+2\sqrt{2}$ だけが $|c|<1$ の範囲にある。

$$I = 4\pi\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+6z+1}; 2\sqrt{2}-3\right) = 4\pi\left.\frac{1}{2z+6}\right|_{z=-3+2\sqrt{2}} = 4\pi\cdot\frac{1}{-6+4\sqrt{2}+6} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.\blacksquare$$