

複素関数・同演習 練習問題 (2024年1月16日, 提出する必要はない)

1月16日の授業で(1)と(3)の類題は解説しますが、(2)はカットするかも。その場合(2)は試験範囲外。

__年__組__番 氏名_____

問14 次の定積分の値を求めよ。(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}$ (2) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4+1} dx$ (3) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3+\cos \theta}$

問 14 解説

- (1) $f(z) := \frac{z^2}{(z^2 + 1)^4}$, $P(z) := (z^2 + 1)^4$, $Q(z) := 1$ とおくと $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ かつ $\deg P(z) = 8 \geq 2 = \deg Q(z) + 2$, $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$. さらに任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $P(x) = (x^2 + 1)^4 \geq (0 + 1)^4 = 1$ であるから $P(x) \neq 0$. ゆえに授業で説明した定理が使えて

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^4} = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c).$$

P, Q ともに \mathbb{C} 全体で正則である。 $P(z) = (z + i)^4(z - i)^4$ であるから、 P の零点は $c = \pm i$ であり、ともに位数は 4. $Q(\pm i) = 1 \neq 0$ であるから、これらは $f(z) = \frac{1}{(z + i)^4(z - i)^4}$ の 4 位の極である。このうち $\text{Im } c > 0$ であるものは $c = i$. ゆえに

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \text{Res}(f; i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{(4-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{d}{dz} \right)^{4-1} \left[(z-i)^4 \cdot \frac{1}{(z-i)^4(z+i)^4} \right] = \frac{2\pi i}{3!} \lim_{z \rightarrow i} ((z+i)^{-4})''' \\ &= \frac{2\pi i}{6} \cdot (-4)(-5)(-6) (z+i)^{-7} \Big|_{z=i} = -2 \cdot 4 \cdot 5\pi i \cdot \frac{1}{(2i)^7} = \frac{5\pi}{2^4} = \frac{5\pi}{16}. \end{aligned}$$

- (2) 被積分関数は偶関数であること、 $x \in \mathbb{R}$ のとき $\frac{x \sin x}{x^4 + 1} = \text{Im} \frac{x e^{ix}}{x^4 + 1}$ であることから、

$$I := \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^4 + 1} dx.$$

$P(z) := z^4 + 1$, $Q(z) := z$ とおくと、 $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) = 4 \geq 2 = \deg Q(z) + 1$, $\frac{x e^{ix}}{x^4 + 1} = \frac{Q(x)}{P(x)} e^{ix}$. さらに任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $P(x) = (x^4 + 1) \geq 0 + 1 = 1$ であるから $P(x) \neq 0$. ゆえに授業で説明した定理が使えて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^4 + 1} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res} \left(\frac{z e^{iz}}{z^4 + 1}; c \right).$$

P, Q, e^{iz} は \mathbb{C} 全体で正則である。 P の零点は $z^4 = -1$ の解であるから、

$$z = e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}, e^{i5\pi/4}, e^{i7\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

どれも位数は 1. このとき分子は 0 ではないので、いずれも被積分関数の 1 位の極であり、これら以外に特異点は存在しない。このうち $\text{Im } c > 0$ であるものは $c_1 := e^{i\pi/4}$, $c_2 := e^{i3\pi/4}$.

$$\text{Res} \left(\frac{z e^{iz}}{z^4 + 1}; c_j \right) = \frac{z e^{iz}}{(z^4 + 1)'} \Big|_{z=c_j} = \frac{z e^{iz}}{4z^3} \Big|_{z=c_j} = \frac{c_j^2 e^{ic_j}}{4 \cdot c_j^4} = -\frac{c_j^2 e^{ic_j}}{4}.$$

$j = 1$ のとき $c_j^2 = e^{i\pi/2} = i$ であるから

$$\text{Res} \left(\frac{z e^{iz}}{z^4 + 1}; c_j \right) = \frac{-i}{4} e^{i(1+i)/\sqrt{2}} = \frac{1}{4} e^{-\sqrt{2}} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{2}} - i \cos \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

$j = 2$ のとき $c_j^2 = e^{i3\pi/2} = -i$ であるから

$$\text{Res} \left(\frac{z e^{iz}}{z^4 + 1}; c_j \right) = \frac{i}{4} e^{i(-1+i)/\sqrt{2}} = \frac{1}{4} e^{-\sqrt{2}} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{2}} + i \cos \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^4+1} dx = 2\pi i \left(\operatorname{Res} \left(\frac{ze^{iz}}{z^4+1}; c_1 \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{ze^{iz}}{z^4+1}; c_2 \right) \right) = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} e^{-\sqrt{2}} \cdot 2 \sin \frac{1}{\sqrt{2}} = \pi i e^{-\sqrt{2}} \sin \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ゆえに $I = \frac{\pi}{2} e^{-\sqrt{2}} \sin \frac{1}{\sqrt{2}}.$

(3)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos \theta}$$

$z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とおくと、 $dz = ie^{i\theta} d\theta$ であるから $d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$. また

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + 1/z}{2}$$

であるから

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{3 + \frac{1}{2}(z + 1/z)} \cdot \frac{dz}{iz} = -2i \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 6z + 1}.$$

留数定理によって

$$I = -2i \cdot 2\pi i \sum_{|c|<1} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 6z + 1}; c \right).$$

$c^2 + 6c + 1 = 0$ の解 $c = -3 \pm 2\sqrt{2}$ のうち、 $-3 + 2\sqrt{2}$ だけが $|c| < 1$ の範囲にある。

$$I = 4\pi \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 6z + 1}; 2\sqrt{2} - 3 \right) = 4\pi \frac{1}{2z + 6} \Big|_{z=-3+2\sqrt{2}} = 4\pi \cdot \frac{1}{-6 + 4\sqrt{2} + 6} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \blacksquare$$