

\_\_年\_\_組\_\_番 氏名\_\_\_\_\_ (解答は裏面も使用可, A4レポート用紙に書いても可)

**問 12** 図を描くことを強く薦める。曲線と被積分関数の特異点の位置関係を把握すること。

円盤における Cauchy の積分公式  $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz$  (仮定をここに書くのは省略) に当てはめることによって、以下の線積分の値を求めよ (部分分数分解はしないでやること)。

(1)  $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z(z+2)^2}$  (2)  $\int_{|z+3|=2} \frac{dz}{z(z+4)}$  (3)  $\int_{\partial D} \frac{dz}{z(z+2)^2}$  ( $D$  は  $\pm 1 \pm i$  を頂点とする正方形の内部)

問 12 解説 まず定理を復習する。

円盤における Cauchy の積分公式

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の開集合、 $c \in \Omega$ ,  $r > 0$ ,  $D := D(c; r)$ ,  $\Omega$  は  $\bar{D}$  を含む開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は正則とするとき、任意の  $a \in D$  に対して

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

これとパターン・マッチさせるとき、 $c$  と  $r$  は簡単で、被積分関数が  $\frac{f(z)}{z-a}$  であることも分かるが、何が  $f(z)$  で、何が  $a$  か、少し考える必要がある。 $f$  は  $|z-c|=r$  の内部と周で正則、 $a$  は  $|z-c|=r$  の中、ということから決定する。要するに

**$a$  は閉曲線の中 (にある被積分関数の特異点) !**

(1)  $c = 0, r = 1, a = 0, f(z) = \frac{1}{(z+2)^2}$  とすると、円盤領域における Cauchy の積分公式の条件 ( $a \in D(c; r)$ ,  $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{-2\}$  とすると  $\bar{D}(c; r) \subset \Omega$ ,  $f$  は  $\Omega$  で正則) が満たされる。ゆえに

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z(z+2)^2} = \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a) = 2\pi i f(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{(0+2)^2} = \frac{\pi i}{2}.$$

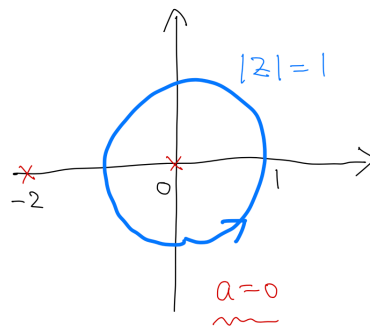


図 1: 円  $|z| = 1$  の中に  $0$  があり、 $-2$  は円の外  $\rightarrow a = 0$

(2)  $c = -3, r = 2, a = -4, f(z) = \frac{1}{z}$  とすると、円盤領域における Cauchy の積分公式の条件 ( $a \in D(c; r)$ ,  $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$  とすると  $\bar{D}(c; r) \subset \Omega$ ,  $f$  は  $\Omega$  で正則) が満たされる。ゆえに

$$\int_{|z+3|=2} \frac{dz}{z(z+4)} = \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i \cdot f(a) = 2\pi i f(-4) = 2\pi i \cdot \frac{1}{-4} = -\frac{\pi i}{2}.$$

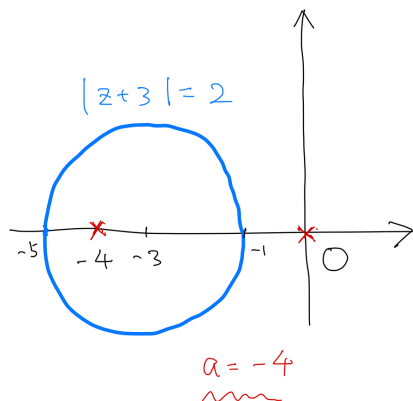


図 2: 円  $|z+3| = 2$  の中に  $-4$  があり、 $0$  は外  $\rightarrow a = -4$

- (3) 問題を出し間違えちゃったので ( $C: z = \cos \theta + 2i \sin \theta$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ) に沿う積分として出題したつもりだった。すみません。)、少し前まで公開してあった解答を訂正します。

被積分関数  $\frac{1}{z(z+2)^2}$  は、領域  $\mathbb{C} \setminus \{0, -2\}$  で正則である。その範囲で積分路  $\partial D$  は円周  $|z| = 1$  に変形できる。そうすると (1) と同じになる。

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{z(z+2)^2} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z(z+2)^2} = \frac{\pi i}{2}.$$

積分路  $\partial D$  が  $|z| = 1$  に変形できることの証明どのようにやるか、実は色々なやり方があります。代表的なものを3つ示します。

- (a) 授業で「星型領域内では、始点と終点が変わらないならば曲線を置き替えても積分の値は変わらない」という定理を証明してある。これを使って、正方形の周を円周に替えるためには、次の4つの段階を踏めば良い。

例えば第1象限の部分は、 $1+i$  を中心として、半径が 1.1 (1 より大きく、 $1+i$  と 0 との距離  $\sqrt{2}$  より小さい) の円盤領域 (これは星型)  $\Omega_1$  を考えます。 $\Omega_1$  で被積分関数は正則です (0,  $-2$  は含まないから)。そして、正方形の周  $\Gamma$  の右上部分  $\Gamma_1$  と、円周  $C$  の右上部分  $C_1$  が  $\Omega_1$  に含まれます。ですから、 $\Gamma_1$  を  $C_1$  に置き換えられます。

第2象限でも同様に  $-1+i$  中心の円を考えます。 $-1+i$  と 0,  $-2$  との距離は  $\sqrt{2}$  なので、第1象限のときと同じ半径 1.1 で大丈夫。正方形の周  $\Gamma$  の左上部分  $\Gamma_2$  は、円周  $C$  の左上部分  $C_2$  に置き換えられます。

第3象限 ( $\Gamma_3$  を  $C_3$ ), 第4象限 ( $\Gamma_4$  を  $C_4$ ) でも同様。

- (b) 各  $j$  に対して、 $\Gamma_j$  と  $C_j$  は縦線領域 ( $D_j$  とする) を囲むので、縦線領域版の Green の定理を用いて、

$$\int_{\Gamma_j} f(z) dz - \int_{C_j} f(z) dz = \int_{\partial D_j} f(z) dz = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \int_{\Gamma_j} f(z) dz = \int_{C_j} f(z) dz$$

とする手があります。Green の定理ちゃんと分かっているという人には、これはアリかもしれない。