**複素関数・同演習 宿題 No. 1** (2023 年 9 月 26 出題, 10 月 3 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番 氏名______________ (解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

**問 1** (1) $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 4 - 3i$ とするとき、$z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $|z_1|$, $\operatorname{Re} z_1$, $\operatorname{Im} z_1$, $\overline{z_1}$ を求めよ (結果が実数でない限り、$x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の形に表せ)。
(2) $z^2 = 1 - 2i$ を満たす複素数 $z$ を求めよ ($z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおいて、$x$, $y$ に関する連立方程式を導いて、それを解け)。

**問 1 解説**

(1) $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 4 - 3i$ のとき

$$z_1 + z_2 = 6 - 4i, \quad z_1 - z_2 = -2 + 2i, \quad z_1 z_2 = 5 - 10i, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i,$$

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = 5, \quad \mathrm{Re}\, z_1 = 2, \quad \mathrm{Im}\, z_1 = -1, \quad \overline{z_1} = 2 + i.$$

(2)

$$\begin{aligned} z^2 = 1 - 2i &\Leftrightarrow (x + yi)^2 = 1 - 2i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 1 - 2i \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1 \wedge 2xy = -2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1 \wedge y = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = 1 \wedge y = -\frac{\sqrt{3}}{2x} \\ &\Leftrightarrow x^4 - x^2 - 1 = 0 \wedge y = -\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$ であるから $x^2 \geq 0$ に注意すると

$$x^4 - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5} + 2}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2\sqrt{5} + 2}}{2}.$$

このとき $y$ は

$$y = -\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{5} + 2}} = \mp\frac{2\sqrt{2\sqrt{5} - 2}}{\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - 2^2}} = \mp\frac{2\sqrt{2\sqrt{5} - 2}}{4} = \mp\frac{\sqrt{2\sqrt{5} - 2}}{2} \quad (\text{複号同潤}).$$

(「複合」とか「復号」とか間違えないように。漢字のまちがいで減点する気はないですが…)

ゆえに

$$z = \pm\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{5} + 2}}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{5} - 2}}{2}i\right).$$

(二重根号なので他の表し方があるかも…) ■