2024 年度 複素関数, 複素関数演習 期末試験問題

2025 年 1 月 29 日 (水曜) 15:00〜17:00 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

問 7 は必ず解答せよ。それ以外の問から 5 つを選択して (全部で 6 つの問に) 解答せよ。各問の解答の順番は自由である (ただし 1 つの問の解答は一箇所にまとめて書くこと)。

問 1. (1) $z=-\sqrt{3}-3i$ のとき、$\dfrac{1}{z}$, $\operatorname{Arg} z$, z の極形式, $\operatorname{Log} z$ を求めよ (Arg と極形式以外は実部・虚部が分かる形に表せ)。　(2) $z^2=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ を満たす複素数 z を求めよ。

問 2.

(1) $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $f(z)=\sin z$ で定めるとき、f の実部と虚部を求め、Cauchy-Riemann 方程式を満たすことを確かめよ。

(2) $g\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $g(z)=\cosh(\overline{z})$ で定めるとき、g の微分可能性を調べよ。

問 3. (1) 1 の 5 乗根を求めよ (実部・虚部が分かる形で表すこと)。　(2) $\cot z=i$ を解け。

問 4. (1) 冪級数の収束半径、収束円の定義を述べよ。(2) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(3n+4)^5}(z-6)^{7n+8}$ の収束円を求めよ。また収束円の境界上の点での収束・発散を調べよ。根拠をきちんと書くこと。

問 5. $f(z):=\dfrac{4z^4-23z^3+26z^2+30z-25}{z^3-7z^2+15z-9}$ について、以下のものを求めよ。根拠を必ず書くこと。
(1) $f(z)$ の部分分数分解　(2) 1 のまわりの Laurent 展開と $\operatorname{Res}(f;1)$　(3) 3 のまわりの Lairent 展開の主部と $\operatorname{Res}(f;3)$　(4) i のまわりの Taylor 展開の収束半径 (展開そのものは求めなくてよい。)

問 6. 次の関数 f に対して、f の 0 のまわりの Laurent 展開と、$\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)\,dz$ の値を求めよ。

(1) $f(z)=\dfrac{(z+1)^{10}}{z^4}$　(2) $f(z)=z^4\exp\dfrac{1}{z}$

問 7. 留数計算を利用して、次の定積分の値を求めよ。

(1) $I_1=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^6+1}\,dx$　(2) $I_2=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{-ix}}{(x^2+1)^2}\,dx$　(3) $I_3=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(\cos x+2)^2}$

問 8. 以下の (a)〜(d) から 1 つの命題を選んで証明せよ。

(a) f が $\mathbb{C}$ の領域 Ω で定義された正則関数で、いたるところ $\operatorname{Im} f=0$ を満たすならば、f は定数関数である。

(b) $\Omega:=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ は星型領域ではない。

(c) c が複素関数 f の高々 k 位の極であるとき、$\operatorname{Res}(f;c)=\dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\Big[(z-c)^k f(z)\Big]$.

(d) $P(z)$ と $Q(z)$ が z の複素係数多項式で、$f(z)=\dfrac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z)\ge\deg Q(z)+2$, $(\forall x\in\mathbb{R})\ P(x)\neq 0$ を満たすならば、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=2\pi i\sum_{\substack{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}\\ \operatorname{Im} c>0}}\operatorname{Res}(f;c)$.

今のところ略解 (採点用)。リクエストがあれば部分的に詳しく書き直す。

1 解説

(1) $z=-\sqrt{3}-3i$ のとき

$$\frac{1}{z}=-\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{i}{4}=\frac{-\sqrt{3}+3i}{12},\quad \operatorname{Arg}z=-\frac{2\pi}{3},\quad z=2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}},\quad \operatorname{Log}z=\frac{1}{2}\log 12-\frac{2\pi}{3}i.$$

(2)

$$z=\pm\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}i\right)=\pm\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})i\right).$$

前者で正解とするが、実は二重根号が外せる、というわけである。実際

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\quad なので\quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

宿題の類題です。

- Arg や Log は主値なのに、複数の値を書いたり、範囲外の値を書いたらダメです。試験前の講義で注意したけれど、無視する人が多い (まあ出席していないのかもしれないけれど)。講義での説明、宿題のフィードバック、試験前注意、三重に無視しているわけで、点がつかなくても仕方ないですね。
- 平方根が 1 つだったり 4 つだったりもダメです (非常識だよね)。$\sqrt{\ }$ の中身を負にしたのに気づかない人もいた (実部・虚部が虚数になったら無茶苦茶)。複号は正確に扱えない人が多い。やめることを勧める。

2 解説

(1) f の実部・虚部を u, v とする。$x,y\in\mathbb{R}$ のとき

$$\begin{aligned} f(x+iy)&=\sin(x+iy)=\frac{1}{2i}\left(e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}\right)=\frac{-i}{2}\left(e^{-y+ix}-e^{y-ix}\right)\\ &=\frac{-i}{2}\left(e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos x-i\sin x)\right)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y.\end{aligned}$$

ゆえに

$$u=\sin x\cosh y,\quad v=\cos x\sinh y,$$

$$u_x=\cos x\cosh y,\quad u_y=\sin x\sinh y,\quad v_x=-\sin x\sinh y,\quad v_y=\cos x\cosh y.$$

確かに Cauchy-Riemann 方程式 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ を満たす。

(2) g の実部、虚部をそれぞれ u, v とする。

$$\begin{aligned} g(x+iy)&=\cosh\left(\overline{x+iy}\right)=\cosh(x-iy)=\frac{1}{2}\left(e^{x-iy}+e^{-(x-iy)}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{x}e^{-iy}+e^{-x}e^{iy}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(e^{x}(\cos y-i\sin y)+e^{-x}(\cos y-i\sin y)\right)=\cosh x\cos y-i\sinh x\sin y.\end{aligned}$$

ゆえに

$$u=\cosh x\cos y,\quad v=-\sinh x\sin y,$$

$$u_x=\sinh x\cos y,\quad u_y=-\cosh x\sin y,\quad v_x=-\cosh x\sin y,\quad v_y=-\sinh x\cos y.$$

u, v は $\mathbb{R}^2$ で C^∞ 級であるから、(全) 微分可能である。g が微分可能であるためには、Cauchy-Riemann 方程式 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ が成り立つことが必要十分である。これは次式と同値である。

$$(\heartsuit)\qquad \sinh x\cos y=\cosh x\sin y=0.$$

$\cosh x\sin y=0$ は ($\cosh x\neq 0$ であるから) $\sin y=0$ と同値なので、その解は x は任意、$y=n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$. $y=n\pi$ を $\sinh x\cos y=0$ に代入すると ($\cos y\neq 0$ であるから) $\sinh x=0$. これは $x=0$ と同値である。すなわち $x=0$, $y=n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ が ($\heartsuit$) の解である。

ゆえに、g は $z=in\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ で微分可能であるが、それ以外の点では微分可能でない。■

```
In[82]:= f[z_] := Sin[z]
                  正弦

In[84]:= ComplexExpand[{Re[f[x + I y]], Im[f[x + I y]]}]
         式の展開      実部    虚…     複素数…  虚数単位

Out[84]= {Cosh[y] Sin[x], Cos[x] Sinh[y]}

In[85]:= g[z_] := Cosh[Conjugate[z]]
                  双…   複素共役

In[86]:= ComplexExpand[{Re[g[x + I y]], Im[g[x + I y]]}]
         式の展開      実部    虚…     複素数…  虚数単位

Out[86]= {Cos[y] Cosh[x], -Sin[y] Sinh[x]}
```

宿題 3, 宿題 4 の類題です。

- (1) で計算間違いをして、Cauchy-Riemann 方程式が成り立たないと書いた人がいた。$\sin z$ は正則であることを知っていれば、計算しなくても Cauchy-Riemann 方程式が成り立つことはわかるので、「変だ。計算間違いをしたのか。」と気づくべきです。
- (2) で連立方程式が解けない人が多かった。$z = 0$ でのみ微分可能という人がおかしかった。論理の扱いがおかしい。実部も虚部も y について周期 2π なのだから、$z = 0$ だけというのは明らかに変ですよね。

3 解説

(1)

$$z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

であり

$$\begin{aligned} z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0. \end{aligned}$$

$X = z + \frac{1}{z}$ とおくと、$X^2 + X - 1 = 0$ で、これは

$$X = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

と解ける。

$$z + \frac{1}{z} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad z + \frac{1}{z} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

から

$$2z^2 + (1-\sqrt{5})z + 2 = 0 \quad \vee \quad 2z^2 + (1+\sqrt{5})z + 2 = 0.$$

ゆえに

$$z = 1, \frac{-(1-\sqrt{5}) \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-(1+\sqrt{5}) \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

(2) $X := e^{iz}$ とおくと、$\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z} = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \cdot \dfrac{2i}{e^{iz}-e^{-iz}} = i\dfrac{X+1/X}{X-1/X}$ であるから

$$\cot z = i \Leftrightarrow i\frac{X+1/X}{X-1/X} = i \Leftrightarrow \frac{X+1/X}{X-1/X} = 1 \Leftrightarrow X + 1/X = X - 1/X \Leftrightarrow \frac{1}{X} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e^{iz}} = 0.$$

この方程式の解は存在しない。 ■

- (1) は昨年度期末試験の問題そのもの (授業中にもやってあります)。
- (2) は宿題そのもの (時々そういうことをします)。$\frac{1}{e^{iz}} = 0$ まで導いて「解なし」が書けないのは、宿題を復習していないのでしょうか。
- (1) で複号を書いて説明がない人が少なくない。複号同順でも複号任意でも、どちらで解釈しても間違いになる答案がかなりありました。

4 解説

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は冪級数とする。$\rho \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$ が $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径であるとは、

$$(|z-c| < \rho \Rightarrow \text{収束}) \quad \text{かつ} \quad (|z-c| > \rho \Rightarrow \text{発散})$$

が成り立つことをいう。このとき

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$$

を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束円という。

(2) $\zeta := (z-6)^7$, $a_n := \dfrac{2^n}{(3n+4)^5}$ とおくと

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(3n+4)^5}(z-6)^{7n+8} = (z-6)^8 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{(3n+4)^5} \cdot \frac{(3n+7)^5}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3+7/n)^5}{2(3+4/n)^5} = \frac{1}{2}.$$

ゆえに、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ は、$|\zeta| < 1/2$ ならば収束, $|\zeta| > 1/2$ ならば発散する。

ゆえに、与えられた冪級数は、$|z-6| < 1/\sqrt[7]{2}$ ならば収束, $|z-6| > 1/\sqrt[7]{2}$ ならば発散する。ゆえにその収束円は $D(6; 1/\sqrt[7]{2})$.

z が収束円の周上にあるとき

$$\left|\frac{2^n}{(3n+4)^5}(z-6)^{7n+8}\right| = \frac{2^n}{(3n+4)^5}\left(2^{-1/7}\right)^{7n+8} = \frac{2^{-8/7}}{(3n+4)^5},$$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)^5} < +\infty$ であるから、優級数定理によって、この冪級数は絶対収束することが分かる。■

5 解説

(1) $4z^4 - 23z^3 + 26z^2 + 30z - 25$ を $z^3 - 7z^2 + 15z - 9$ で割ると、商が $4z+5$, 余りが $z^2 - 9z + 20$. また $z^3 - 7z^2 + 15z - 9 = (z-1)(z-3)^2$ であるから

$$f(z) = \frac{4z^4 - 23z^3 + 26z^2 + 30z - 25}{z^3 - 7z^2 + 15z - 9} = 5 + 4z + \frac{z^2 - 9z + 20}{z^3 - 7z^2 + 15z - 9} = 5 + 4z + \frac{z^2 - 9z + 20}{(z-1)(z-3)^2}.$$

$$\frac{z^2 - 9z + 20}{(z-1)(z-3)^2} = \frac{A}{(z-3)^2} + \frac{B}{z-3} + \frac{C}{z-1}$$

を満たす A, B, C が存在するはずである。

$$z^2 - 9z + 20 = A(z-1) + B(z-1)(z-3) + C(z-3)^2.$$

$z = 1$ を代入して $12 = 4C$. ゆえに $C = 3$. $z = 3$ を代入して、$2 = 2A$. ゆえに $A = 1$. 最高次の係数を比較して、$B + C = 1$. ゆえに $B = -2$.

以上から

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)^2} - \frac{2}{z-3} + \frac{3}{z-1} + 4z + 5.$$

(2)

$$4z+5=4(z-1+1)+5=9+4(z-1).$$

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{(z-1+1)-3}=\frac{1}{(z-1)-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(z-1)/2}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}.$$

この冪級数が収束する $\Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{2}\right|<1 \Leftrightarrow |z-1|<2$. 収束円は $D(1;2)$.

これを項別微分して

$$\frac{1}{(z-3)^2}=-\left(\frac{1}{z-3}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{2^{n+2}}(z-1)^n \quad (\text{収束円は } D(1;2))$$

ゆえに

$$\begin{aligned}f(z)&=9+4(z-1)-(-2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}(z-1)^n+\frac{3}{z-1}\\&=\frac{41}{4}+\frac{19}{4}(z-1)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+5}{2^{n+2}}(z-1)^n+\frac{3}{z-1}\end{aligned}$$

冪級数部分は、$-\frac{2}{z-3}+\frac{1}{(z-3)^2}$ の展開なので、その収束半径は、中心 1 と特異点 3 との距離 2 に等しい。ゆえにこの Laurent 展開は $z\in A(1;0,2)$ で成り立つ。Laurent 展開の主部は $\dfrac{3}{z-1}$ で、$\mathrm{Res}(f;1)=3$ である。

(3) 部分分数分解の結果から $\dfrac{-2}{z-3}+\dfrac{1}{(z-3)^2}$ が、f の 3 のまわりの Laurent 展開の主部である (それ以外の部分は 3 の近傍で正則であるから冪級数に展開され、それを合わせると 3 のまわりの Laurent 展開となるから)。ゆえに $\mathrm{Res}(f;3)=-2$.

(4) f は $\mathbb{C}\setminus\{1,3\}$ で正則で、1 と 3 は極である。$|i-1|=\sqrt{2}<\sqrt{10}=|i-3|$ であるから、f は $D(i;\sqrt{2})$ で正則であるが、その円の周上の点 1 について $\lim_{z\to 1}f(z)=\infty$. ゆえに i を中心とする f の冪級数展開の収束半径は $\sqrt{2}$. ■

```
In[82]:= f[z_] := Sin[z]
                  正弦

In[84]:= ComplexExpand[{Re[f[x + I y]], Im[f[x + I y]]}]
         式の展開      実部     虚…  複素数…  虚数単位

Out[84]= {Cosh[y] Sin[x], Cos[x] Sinh[y]}

In[85]:= g[z_] := Cosh[Conjugate[z]]
                  双…   複素共役

In[86]:= ComplexExpand[{Re[g[x + I y]], Im[g[x + I y]]}]
         式の展開      実部     虚…  複素数…  虚数単位

Out[86]= {Cos[y] Cosh[x], -Sin[y] Sinh[x]}

In[113]:= SeriesCoefficient[f[z], {z, 1, n}]
          級数の係数

Out[113]= 3               n == -1
          2^(-2-n) (5 + n) n > 1
          41/4            n == 0
          19/4            n == 1
          0               True

In[114]:= Residue[f[z], {z, 1}]
          留数

Out[114]= 3

In[115]:= Residue[f[z], {z, 3}]
          留数

Out[115]= -2
```

- 宿題で良く出てきたものだけれど。
- 部分分数分解を間違えた人は少なかったけれど、その場合は、極力、(2), (3) はその部分分数分解が正しいとして採点しました。
- (2) は等比級数の和の公式が正しく使えるか、項別微分が正しくできるか、Laurent 級数の形にまとめられるか (1 次の項が $z-1$ でなく z という人が多かった)、収束の条件が書かれているか、4 つをチェック。収束の確認をしない人がとても多いのは非常にまずいです。

6 解説

(1) 分子を多項式として展開して整理すると

$$f(z)=\frac{(z+1)^{10}}{z^4}=\frac{1}{z^4}\cdot\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}z^k=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}z^{k-4}\quad(z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}).$$

これが f の 0 のまわりの Laurent 展開である (もう少していねいに書くべきかもしれないがサボる)。$k=3$ のとき $z^{k-4}=\frac{1}{z}$ となるので

$$\operatorname{Res}(f;0)=\binom{10}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}=120.$$

留数定理より

$$\int_{|z|=1}f(z)\,dz=2\pi i\operatorname{Res}(f;0)=120=240\pi i.$$

($(z+1)^{10}=1+10z+45z^2+120z^3+\cdots$ …さすがに Pascal の三角形を書くのは面倒かな。)

(2) exp の 0 のまわりの冪級数展開から

$$\exp\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n=1+\frac{1}{1!}\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z^4}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^5}\cdots\quad(z\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$$

であるから

$$f(z)=z^4\exp\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{4-n}=z^4+\frac{1}{1!}z^3+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z}+\cdots\quad(z\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$$

これが f の 0 のまわりの Laurent 展開である (もう少していねいに…)。ゆえに

$$\mathrm{Res}(f;0)=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}.$$

留数定理より

$$\int_{|z|=1}f(z)\,dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(f;0)=\frac{\pi i}{60}.\blacksquare$$

7 解説

(1) 被積分関数は偶関数であるから

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^6+1}\,dx.$$

$P(z):=z^6+1$, $Q(z):=z^2$, $f(z):=\frac{Q(z)}{P(z)}$ とおく。$\deg P(z)=6\geq 4=\deg Q(z)+2$. またすべての実数 x に対して、$P(x)=x^6+1\geq 1$ であるから $P(x)\neq 0$.

f の極は P の零点である。$P(c)=0\Leftrightarrow c^6+1=0\Leftrightarrow c=e^{i\pi/6},e^{i\pi/2},e^{i5\pi/6},e^{i7\pi/6},e^{i3\pi/2},e^{i11\pi/6}$. このうち $\mathrm{Im}\,c>0$ を満たすものは、$c_1=e^{i\pi/6}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $c_2=i$, $c_3=e^{i5\pi/6}=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ の 3 つである。

講義で学んだ定理より

$$I_1=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f;c_1)+\mathrm{Res}(f;c_2)+\mathrm{Res}(f;c_3)\right).$$

c_j は P の 1 位の零点であるから、

$$\mathrm{Res}(f;c_j)=\frac{Q(c_j)}{P'(c_j)}=\frac{c_j^2}{6c_j^5}=\frac{c_j^3}{6c_j^6}=-\frac{c_j^3}{6}\quad(\because c_j^6=-1).$$

$c_1^3=e^{\pi i/2}=i$, $c_2^3=e^{3\pi i/2}=-i$, $c_3^3=e^{5\pi i/2}=-i$ であるから

$$I_1=-\frac{\pi i}{6}\left(i-i-i\right)=-i^2\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}.$$

Mathematica で検算

```
Integrate[x^2/(x^6+1),{x,0,Infinity}]
```

$\frac{\pi}{6}$ となる。

(2) $e^{-ix}=\overline{e^{ix}}$ に注意する。まず

$$\overline{I_2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{(x^2+1)^2}dx$$

を求めよう。

$P(z):=(z^2+1)^2$, $Q(z):=z$, $f:=\frac{Q}{P}$, $a=1$ とおく。

$$\deg P(z)=4\geq 2+1=\deg Q(z)+1.$$

すべての $x\in\mathbb{R}$ に対して、$P(x)=(x^2+1)^2\ge 1$ であるから $P(x)\neq 0$.

また $a>0$.

f の極は P の零点である。$P(c)=0\Leftrightarrow c^2+1=0\Leftrightarrow c=\pm i$. このうち $\operatorname{Im} c>0$ をみたすものは $c=i$ だけである。

講義で学んだ定理により (計算はちょっと面倒)

$$\begin{aligned}\overline{I_2}&=2\pi i\operatorname{Res}(f(z)e^{iaz};i)=2\pi i\cdot\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}\left[(z-i)^2f(z)e^{iaz}\right]=2\pi i\lim_{z\to i}\left(\frac{ze^{iz}}{(z+i)^2}\right)'\\&=2\pi i\cdot\lim_{z\to i}\frac{ie^{iz}(1+2iz+z^2)}{(z+i)^3}=2\pi i\cdot\frac{ie^{i^2}(1-2-1)}{8i^3}=2\pi i\cdot\frac{e^{-1}}{4}=\frac{\pi i}{2e}.\end{aligned}$$

ゆえに $I_2=-\dfrac{\pi i}{2e}$.

Mathematica で検算

```
Integrate[x Exp[-I x]/(x^2+1)^2,{x,-Infinity,Infinity}]
```

$-\frac{i\pi}{2e}$ となる。

(別解)

$$I_2=-2\pi i\sum_{\substack{\operatorname{Im} c<0\\ c\text{ は }f\text{ の極}}}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{-iz};c\right)=-2\pi i\operatorname{Res}\left(f(z)e^{-iz};-i\right)=-2\pi i\lim_{z\to -i}\frac{-i(z^2-1)e^{-iz}}{(z-i)^3}$$

として計算した人が何人かいた。確かにそうだけど (普通に採点したけれど)、応用の多い $e^{-ix}=\overline{e^{ix}}$ に慣れて欲しい気持ちがある。

この問は、最後の計算が間違いやすいけれど、そこの配点はあまり高くしていない。積分を留数で表して、その留数を計算する方針が書かれていれば、そこそこの点をつけた。

(別解 — 定期試験の答案から) $y=-x$ と変数変換すると

$$I_2=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ye^{iy}}{(y^2+1)^2}dy.$$

こうすると、$a>0$ の場合の公式を使える。なるほど気づきませんでした。面白い。

(3) $z=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ とおくと、$dz=ie^{i\theta}d\theta$ であるから、$d\theta=\dfrac{dz}{iz}$.

$$I_3=\int_{|z|=1}\frac{1}{\left[\frac{z+1/z}{2}+2\right]^2}\cdot\frac{dz}{iz}=-4i\int_{|z|=1}\frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\,dz.$$

$$\int_{|z|=1}\frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\,dz=2\pi i\sum_{|c|<1}\operatorname{Res}\left(\frac{z}{(z^2+4z+1)^2};c\right).$$

極 c は $c^2+4c+1=0$ の解 $c_1=-2+\sqrt{3}$, $c_2=-2-\sqrt{3}$. このうち $|z|=1$ の囲む範囲にあるのは、c_1.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{z}{(z^2+4z+1)^2};c_1\right)&=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to c_1}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}\left[(z-c_1)^2\frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\right]=\left.\left(\frac{z}{(z-c_2)^2}\right)'\right|_{z=c_1}\\&=\left.\frac{-(z+c_2)}{(z-c_2)^3}\right|_{z=c_1}=\frac{1}{6\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

$$I_3=-4i\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{6\sqrt{3}}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}.$$

Mathematica で検算

```
Integrate[1/(Cos[x]+2)^2,{x,0,2Pi}]
```

$\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ となる。

- (1) では、c が P の 1 位の零点なので、$\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c\right)=\frac{Q(c)}{P'(c)}$ で計算するのがお勧め (と言ってある)。c は f の 1 位の極であるから、$\operatorname{Res}(f;c)=\lim_{z\to c}(z-c)f(z)$ でも計算できるが、計算ミスしやすい。
- (2) で $I_2=2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{z}{\left(z^2+1\right)^2}e^{iz};i\right)$ と、定理の仮定をチェックせずに誤用した人は 0 点。
- 計算が面倒ですが、c_1, c_2 を導入して文字式で計算すると、少し簡単になります。