複素指数関数の定義の方法

桂田 祐史

2024 年 6 月 28 日, 2024 年 6 月 30 日

Euler の公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を “証明したい” と考える人は多いが、そもそも $e^{i\theta}$ という式に意味を持たせるため、普通[1]は複素指数関数 (複素変数 z に対する $e^z=\exp z$) をどう定義するか選んで決めることになる。

定義の方法は色々ありうる。

方法 1 冪級数による方法.

$$e^z:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\quad (z\in\mathbb{C}). \tag{1}$$

— これは正攻法という感じがする。多くのテキストで採用されている (現在の代表的な日本語の関数論の入門書として神保 [1] を紹介しておく)。$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 自体は割と簡単に示せるが、級数に関する基本的な定理をたくさんやらないといけないので、指数法則や、$(e^z)'=e^z$ の証明にたどり着くにはそれなりに手間がかかる。(少なくとも関数論の入門講義の 1/3 くらいはやることになりそう。)

方法 2 実指数関数と実三角関数を使う方法.

$$e^{x+iy}:=e^x(\cos y+i\sin y)\quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

とにかく早く定義できて、比較的多くの公式がすぐ証明できる。ただ「Euler の公式を証明したい」という気持ちを持っている場合は、何かズルをしているように感じられるかもしれない (それが唯一の欠点のような気がする)。結局、こうして定義した e^z の $z=00$ の周りでの Taylor 展開が (1) であることを確かめる、という手順になるので、学ぶべき総量が減るわけではない。

このやり方は、梶原 [2] で知って気に入って、自分の講義で使っている (講義ノート [3] を紹介しておく)。

方法 3 公式 $e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ $(\in\mathbb{R})$ を複素関数まで延長する方法。

$$e^z:=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\quad (z\in\mathbb{C}).$$

一応これでできることは知っているが (高校生のときに読んだ遠山 [4] の中の「XI 伸縮と回転 オイレルの公式」で知りました)、これを採用している関数論のテキストは見たことがない。

[1] 純虚数に対してのみ意味があれば良い、と言い張ることも出来なくはないだろうけれど…

以上、スタートの話を書いたわけだけど、ゴールの話も書いておくと、複素指数関数の正則性を示した後、一致の定理まで学んで「それ以外の複素指数関数はあまり意味がない」と理解できる。そこまでやって本当の納得が得られる、と私は考えている。関数論を勉強しましょう。

(追記) 遠山先生の説明は、冪級数の議論なしなので、高校生でも読めるようになっている。この「数学入門」は新書 2 冊の分量で、豊富な内容をきちんと説明しているのは素晴らしい。

参考文献

[1] 神保(じんぼう)道夫：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063 でアクセスできる.

[2] 梶原壌二：関数論入門 — 複素変数の微分積分学 —, 森北出版 (1980).

[3] 桂田祐史：複素関数論ノート, 数学科での講義科目「関数論 2」の講義ノートあらため 現象数理学科の「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/complex-function.pdf (2008〜).

[4] 遠山 啓(ひらく)：数学入門 (下), 岩波新書 G5, 岩波書店 (1960).