複素関数・同演習 第 7 回
～複素関数の微分可能性・Cauchy-Riemann 方程式～

桂田 祐史（かつらだ まさし）
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/

2026 年 10 月 14 日, 2026 年 10 月 26 日

目次

0 本日の内容・連絡事項 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
2 複素関数とその極限、連続性、正則性 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
2.4 微分、正則性 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
2.4.1 定義 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
2.4.2 例 ・・ 2
2.4.3 微分可能な関数の和・差・積・商 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
2.4.4 多項式と有理関数の正則性 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 3
2.4.5 合成関数の微分法と逆関数の微分法・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 3
2.5 Cauchy-Riemann の方程式 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 4
2.5.1 微分可能性の必要十分条件 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 4
参考文献 ・・ 7

0 本日の内容・連絡事項

- 複素関数の微分可能性の話を始める。定義は実関数のときと形式的に同じと言えるが、実関数とは全く違った性質を持つ。手始めとして Cauchy-Riemann 方程式を論じる。
- 宿題 3 を出す (〆切は 10 月 20 日 13:30)。次回、サイズが 5MB 超えた人は点呼のときに指摘する。11 月以降は 0.5 回提出とカウントする。
- 宿題 1,2 は解答公開ずみ。宿題 1 はフィードバック済み。

2　複素関数とその極限、連続性、正則性 (続き)

2.4　微分、正則性

2.4.1　定義

定義 2.1 (微分可能, 正則)**.** 簡単のため、Ω は $\mathbb{C}$ の開集合とし、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c \in \Omega$ とする。f が c で**微分可能** (differentiable) であるとは、極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

が存在することをいう。このとき、この極限を $f'(c)$ と表し、f の c における**微分係数** (the derivative of f at c) と呼ぶ。

導関数 (derivative, derived function) などの言葉の使い方は、実関数のときと同様に定義する。

Ω の任意の点 z に対して、f が z で微分可能であるとき、f は Ω で**正則** (regular, 整型, holomorphic) であるという。

2.4.2　例

例 2.2 (正則な関数の例)**.** $f(z)=\gamma$ (定数関数) と $g(z)=z$ は、$\mathbb{C}$ 全体で定義されて正則である。

実際、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma-\gamma}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

であるから、f は z で微分可能で $f'(z)=0$. f は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

また

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(z+h)-g(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{z+h-z}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

であるから、g は z で微分可能で $g'(z)=1$. g は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

2.4.3　微分可能な関数の和・差・積・商

命題 2.3 (微分可能な関数の和・差・積・商). Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$c \in \Omega$ とする。$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ と $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が c で微分可能ならば、$f+g$, $f-g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (ただし $g(c) \neq 0$ とする) も c で微分可能であり、

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(c) &= f'(c) + g'(c),\\
(f-g)'(c) &= f'(c) - g'(c),\\
(fg)'(c) &= f'(c)g(c) + f(c)g'(c),\\
\left(\frac{f}{g}\right)'(c) &= \frac{g(c)f'(c) - g'(c)f(c)}{g(c)^2}.
\end{aligned}
$$

証明　実関数の場合と同様である。 □

2.4.4　多項式と有理関数の正則性

系 2.4 (多項式と有理関数の正則性). (1) 任意の自然数 k に対して、$f(z) = z^k$ は $\mathbb{C}$ で正則で、$f'(z) = kz^{k-1}$.

(2) 任意の複素係数多項式の定める関数は $\mathbb{C}$ 上で正則である。

$$
\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} z^j.
$$

(2 つめの等式がすらすら導けるように。「$k-1=j$ とおくと…」)

(3) 任意の複素係数有理式 $r(z) = \dfrac{q(z)}{p(z)}$ ($p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $p(z)$ は零多項式ではない) の定める関数 $r\colon \Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) \neq 0\} \ni z \mapsto r(z) \in \mathbb{C}$ は正則である。

2.4.5　合成関数の微分法と逆関数の微分法

2026/10/14 の講義では、ここを飛ばした。2026/10/20 の講義で説明する予定である。

合成関数の微分法　f と g が合成可能で、f が c で、g が $f(c)$ で微分可能ならば、$g \circ f$ は c で微分可能で

$$
(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) f'(c). \tag{1}
$$

あるいは $w = f(z)$, $\zeta = g(w)$ とするとき、合成関数 $\zeta = g(f(z))$ について

$$
\frac{d\zeta}{dz} = \frac{d\zeta}{dw}\frac{dw}{dz}. \tag{2}
$$

逆関数の微分法　関数 $w = f(z)$ が微分可能かつ全単射であるとき、逆関数 $z = f^{-1}(w)$ について

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\dfrac{dw}{dz}} \quad (\text{ただし } dw/dz \neq 0 \text{ とする}) \tag{3}$$

も成り立つ (逆関数定理が重要だが、それは §2.5.5 で説明する)。

2.5　Cauchy-Riemann の方程式

2.5.1　微分可能性の必要十分条件

定理 2.5 (複素関数が微分可能 ⇔ 実部・虚部が微分可能かつ Cauchy-Riemann 方程式)**.** Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c = a + bi \in \Omega$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とする。f が c で微分可能であるためには、f の実部 u と虚部 v が (a, b) で (全) 微分可能でかつ

$$u_x(a,b) = v_y(a,b), \quad u_y(a,b) = -v_x(a,b) \tag{☆}$$

を満たすことが必要十分である。

(☆) を **Cauchy-Riemann の方程式** (the Cauchy-Riemann equations, the Cauchy-Riemann relations) と呼ぶ。

(復習) f の実部 u, 虚部 v は、$u\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$, $v\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$,

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+yi), \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+yi) \quad ((x,y) \in \widetilde{\Omega})$$

で定義される関数である。ただし

$$\widetilde{\Omega} := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + yi \in \Omega \right\}.$$

例 2.6 (正則関数が Cauchy-Riemann 方程式を満たすことを見る)**.** 正則な $f(z) = z^2$ $(z \in \mathbb{C})$, $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$, $f(z) = e^z$ $(z \in \mathbb{C})$ などが、Cauchy-Riemann 方程式を満たすことを確かめてみよう。

例 2.7 (微分可能でないことの証明に使ってみる)**.** $f(z) = \operatorname{Re} z$, $f(z) = \operatorname{Im} z$, $f(z) = |z|$, $f(z) = \bar{z}$ (以上は $\mathbb{C}$ で定義されている), $f(z) = \operatorname{Arg} z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$, $f(z) = \log|z|$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$ は任意の z に対して、z で微分可能でない。これらは微分可能性の定義に戻って証明することも出来るが、上の定理を用いると簡単である。

$f(z) = \log|z|$ の場合に証明してみよう。

実部 $u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$, 虚部 $v(x,y) = 0$ である。定義域は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

ゆえに $u_x(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $u_y(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $v_x(x,y)=0$, $v_y(x,y)=0$. $x\neq 0$ であれば $u_x\neq v_y$, $y\neq 0$ であれば $u_y\neq -v_x$. ゆえに任意の点で Cauchy-Riemann 方程式は成り立たない。

以上より、任意の点 (x,y) において、「u と v は (全) 微分可能で、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ」という条件は満たさない。ゆえに f は微分可能でない。 □

定理 2.5 の証明前に、微分可能性から Cauchy-Riemann 方程式を導く簡潔な方法を紹介する。

f が $c=a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ で微分可能ならば、u と v は (a,b) で偏微分可能で、

$$(\sharp)\qquad f'(c)=u_x(a,b)+iv_x(a,b)=\frac{1}{i}\left(u_y(a,b)+iv_y(a,b)\right)$$

が成り立つ。

特に実部・虚部を比較して $u_x(a,b)=v_y(a,b)$, $u_y(a,b)=-v_x(a,b)$.

($(\sharp)$ を $f'=f_x=\dfrac{1}{i}f_y$ と書く人もいる。記号の濫用だが[1]分かりやすいかもしれない。ここでは Cauchy-Riemann 方程式を導くために用いたが、$(\sharp)$ 自体は覚えておく価値がある。宿題で使う問題を出す。)

証明　f が c で微分可能とは、

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

が存在することであるが、$h=h_x+ih_y$ $(h_x,h_y\in\mathbb{R})$ の動く範囲を次の二通りに制限した場合を考える。 (次のスライドに続く)

(a) $h_y=0$ のとき (水平移動)、すなわち $h=h_x$ $(h_x\in\mathbb{R})$ (実数の値だけを取る)

$f(c+h_x)=u(a+h_x,b)+iv(a+h_x,b)$ に注意すると、

$$\begin{aligned}f'(c)&=\lim_{\substack{h_x\to 0\\ h_x\in\mathbb{R}}}\frac{f(c+h_x)-f(c)}{h_x}=\lim_{h_x\to 0}\frac{(u(a+h_x,b)+iv(a+h_x,b))-(u(a,b)+iv(a,b))}{h_x}\\&=\lim_{h_x\to 0}\left(\frac{u(a+h_x,b)-u(a,b)}{h_x}+i\frac{v(a+h_x,b)-v(a,b)}{h_x}\right)=u_x(a,b)+iv_x(a,b).\end{aligned}$$

(b) $h_x=0$ のとき (垂直移動)、すなわち $h=ih_y$ $(h_y\in\mathbb{R})$ (純虚数の値だけを取る)

$f(c+ih_y)=u(a,b+h_y)+iv(a,b+h_y)$ に注意すると、

$$\begin{aligned}f'(c)&=\lim_{\substack{h_y\to 0\\ h_y\in\mathbb{R}}}\frac{f(c+ih_y)-f(c)}{ih_y}=\lim_{h_y\to 0}\frac{(u(a,b+h_y)+iv(a,b+h_y))-(u(a,b)+iv(a,b))}{ih_y}\\&=\frac{1}{i}\lim_{h_y\to 0}\left(\frac{u(a,b+h_y)-u(a,b)}{h_y}+i\frac{v(a,b+h_y)-v(a,b)}{h_y}\right)=\frac{1}{i}\left(u_y(a,b)+iv_y(a,b)\right).\end{aligned}$$

以上から

$$f'(c)=u_x(a,b)+iv_x(a,b)=\frac{1}{i}\left[u_y(a,b)+iv_y(a,b)\right]=v_y(a,b)-iu_y(a,b).$$

---

1)　うるさく言うと、f は変数 z の複素関数であって、変数 x, y の関数ではないので、f_x, f_y という書き方は変である。

実部・虚部を比較して、

$$u_x(a,b) = v_y(a,b), \quad v_x(a,b) = -iu_y(a,b). \quad \square$$

定理 2.5 の証明　f が c で微分可能であるとは

$$(\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad \lim_{h\to 0} \left| \frac{f(c+h)-f(c)}{h} - (p+iq) \right| = 0$$

が成り立つことを意味する。方針: u, v, p, q で表す。

$h = h_x + ih_y$ $(h_x, h_y \in \mathbb{R})$ とおくと

$$f(c+h) - f(c) = u(a+h_x, b+h_y) - u(a,b) + i\left(v(a+h_x, b+h_y) - v(a,b)\right),$$
$$(p+iq)h = (p+iq)(h_x+ih_y) = (ph_x - qh_y) + i(qh_x + ph_y)$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(c+h)-f(c)}{h} - (p+iq) \right| \\
&= \frac{|f(c+h)-f(c)-(p+iq)h|}{|h|} \\
&= \left| \frac{u(a+h_x,b+h_y)-u(a,b)-(ph_x-qh_y)}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}} + i\frac{v(a+h_x,b+h_y)-v(a,b)-(qh_x+ph_y)}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}} \right|.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
&f \text{ が } c \text{ で微分可能} \\
&\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R}) \lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)} \frac{u(a+h_x,b+h_y)-u(a,b)-(ph_x-qh_y)}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}} = 0 \\
&\qquad \text{かつ} \lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)} \frac{v(a+h_x,b+h_y)-v(a,b)-(qh_x+ph_y)}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad u \text{ と } v \text{ は } (a,b) \text{ で (全) 微分可能で} \\
&\qquad\qquad u_x(a,b) = p,\ u_y(a,b) = -q,\ v_x(a,b) = q,\ v_y(a,b) = p \\
&\Leftrightarrow u \text{ と } v \text{ は } (a,b) \text{ で (全) 微分可能で} u_x(a,b) = v_y(a,b), \quad u_y(a,b) = -v_x(a,b). \quad \square
\end{aligned}$$

2026/10/14 の講義はここまでです。

余談 2.8 (Looman-Menchoff の定理)**.** 実際上、必要になることはまれであると思うが、実は次の Looman-Menchoff の定理が成り立つ。「Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続とする。f が正則であるためには、f がいたるところ偏微分可能で Cauchy-Riemann 方程式を満たすことが必要十分である。」(つまり u, v の微分可能性は仮定せず、単に連続かつ偏微分可能で Cauchy-Riemann 方程式満たせば良い、ということである。) この定理はいくつかのテキストで紹介されているが、証明が載っている手頃なテキストを知らない。Gray-Morris [1] は self-contained ではないが、大筋はつかめるようになっている。

1 点で連続かつ偏微分可能で、その点で Cauchy-Riemann 方程式が成り立っていても、その点で微分可能であるとは限らないことは注意しておく。 $\square$

参考文献

[1] Gray, J. D. and Morris, S. A.: When is a function that satisfies the Cauchy-Riemann equations analytic?, *American Mathematical Monthly*, Vol. 85, pp. 246–256 (1978).