複素関数・同演習 第 6 回
～複素関数の極限・連続性～

桂田 祐史（かつらだ まさし）
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/

2026 年 10 月 13 日, 2026 年 10 月 20 日

目次

0 本日の内容・連絡事項 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
2 複素関数とその極限、連続性、正則性 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
2.1 複素関数の実部・虚部 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
2.1.1 定義 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
2.1.2 例 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
2.2 良く使う記号・用語 (極限に向けて) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 3
2.3 極限, 連続性 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 3
2.3.1 定義 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 4
2.3.2 実関数の極限・連続性への翻訳 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 4
2.3.3 複素関数の和・差・積・商の極限・連続性 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 5
参考文献 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 6

0 本日の内容・連絡事項

- 講義ノート [1] の第 2 章に入る。ここからは新しく学ぶものばかり、と考えて下さい。
- 宿題 3 を出す (〆切は 10 月 20 日 13:30)。

2　複素関数とその極限、連続性、正則性

2.1　複素関数の実部・虚部

2.1.1　定義

いよいよ複素関数を調べ始めよう。

定義 2.1 (複素関数の実部・虚部). $\Omega \subset \mathbb{C}$ とする。関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ に対して、f の**実部** u, **虚部** v を

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+yi), \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+yi) \quad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}). \tag{1}$$

で定める。ただし

$$\widetilde{\Omega} := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+yi \in \Omega \right\}. \tag{2}$$

$u\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$, $v\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ である。(メモ: 面倒がらずに $\widetilde{\Omega}$ の図を描いて説明する。)

こうして実部・虚部に分解してしまえば、極限と連続性については、実 2 変数の関数のそれと同じである (数学解析等を復習すると良い。例えば桂田 [2] を見よ。)。

同じであっても省略せずに (すぐ後に) 説明するが、まずは実部・虚部を求める練習をしよう。

2.1.2　例

例 2.2. (1) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ とするとき ($\Omega = \mathbb{C}$, $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^2$)

$$f(x+yi) = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

ゆえに

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy.$$

(2) $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{z}$ とするとき ($\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$)

$$f(x+yi) = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}.$$

ゆえに

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

例 2.2 (つづき). (3) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ とするとき

$$f(x+yi) = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

ゆえに

$$u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y.$$

次回、任意の正則関数 f の実部・虚部 u, v について、Cauchy-Riemann 方程式と呼ばれる微分方程式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

が成り立つことを証明する。上にあげた例で、この方程式が成り立つことは容易に確認できる。 □

2.2 良く使う記号・用語 (極限に向けて)

$\mathbb{R}^2$ の場合と本質的に同じである。記号が少し違うくらい (私は過去の数学解析では、a 中心, 半径 r の開球を $B(a;r)$ と書いた)。

(1) $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ に対して

$$D(c,r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\}.$$

c を中心とする半径 r の**開円盤** (an open disk, 開円板) とよぶ。

(2) $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して

$$\overline{\Omega} := \{z \in \mathbb{C} \mid (\forall \varepsilon > 0)\ D(z;\varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\}$$

とおき、Ω の**閉包** (the closure of Ω) とよぶ。

(3) $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して

- Ω が $\mathbb{C}$ の**開集合** (open set) とは、

$$(\forall z \in \Omega)(\exists \varepsilon > 0) \quad D(z;\varepsilon) \subset \Omega$$

が成り立つことをいう。

- Ω が $\mathbb{C}$ の**閉集合** (closed set) とは、Ω の補集合 $\Omega^{\complement} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \Omega\}$ が $\mathbb{C}$ の開集合であることをいう。

2.3 極限, 連続性

2.3.1 定義

定義 2.3 (複素関数の極限、連続性). $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とする。

(1) $c \in \overline{\Omega}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ とする。$z \to c$ のとき $f(z)$ が γ に**収束する**とは

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : |z - c| < \delta) \quad |f(z) - \gamma| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。このことを $f(z) \to \gamma$ と表す。この条件はつぎのようにも書ける。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega) \quad (|z - c| < \delta \Rightarrow |f(z) - \gamma| < \varepsilon).$$

(このような γ は存在すれば一意的なので) γ を $f(z)$ の $z \to c$ のときの**極限** (the limit) とよび、$\lim_{z \to c} f(z)$ で表す。

注意 $z \to c$ のとき $f(z) \to \gamma$ となることを

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : 0 < |z - c| < \delta) \quad |f(z) - \gamma| < \varepsilon$$

が成り立つことと定義している本が多い。この講義では、杉浦 [3] の定義に従う。

定義 2.3 (複素関数の極限、連続性 (つづき)). $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とする。

(2) $c \in \Omega$ とする。f が c で**連続**であるとは

$$\lim_{z \to c} f(z) = f(c)$$

が成り立つことをいう。ε-δ 論法で表すと

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : |z - c| < \delta) \quad |f(z) - f(c)| < \varepsilon.$$

(3) f が Ω で**連続**とは、f が Ω の任意の点 c で連続なことをいう。

2.3.2　実関数の極限・連続性への翻訳

複素関数の極限・連続性は、実部・虚部の極限・連続性に翻訳できる。

$$x := \operatorname{Re} z, \quad y := \operatorname{Im} z, \quad \boldsymbol{z} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\alpha := \operatorname{Re} \gamma, \quad \beta := \operatorname{Im} \gamma, \quad \boldsymbol{\gamma} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$a := \operatorname{Re} c, \quad b := \operatorname{Im} c, \quad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+yi), \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+yi), \quad \boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\lim_{z \to c} f(z) = \gamma \Leftrightarrow \lim_{\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\gamma} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} u(x,y) = \alpha \\ \lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} v(x,y) = \beta. \end{cases}$$

ゆえに

$$f \text{ が } c \text{ で連続} \Leftrightarrow \boldsymbol{f} \text{ が } \boldsymbol{c} \text{ で連続} \Leftrightarrow u \text{ と } v \text{ が } (a,b) \text{ で連続.}$$

「c で」を「Ω で」、「$\boldsymbol{c}$ で」と「 (a,b) で」を「$\widetilde{\Omega}$ で」に変えても成立する。ただし、$\widetilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+yi \in \Omega\}$.

例 2.4. 指数関数 $f(z) = e^z$ については、実部 $u(x,y) = e^x \cos y$, 虚部 $v(x,y) = e^x \sin y$ が $\mathbb{R}^2$ で連続である。ゆえに f は $\mathbb{C}$ で連続である。

2.3.3　複素関数の和・差・積・商の極限・連続性

命題 2.5 (複素関数の和・差・積・商の極限)**.** $\Omega \subset \mathbb{C}$, $c \in \overline{\Omega}$. $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が $z \to c$ のとき極限を持つとき、

$$\lim_{z \to c} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \to c} f(z) + \lim_{z \to c} g(z),$$
$$\lim_{z \to c} (f(z) - g(z)) = \lim_{z \to c} f(z) - \lim_{z \to c} g(z),$$
$$\lim_{z \to c} (f(z) g(z)) = \lim_{z \to c} f(z) \cdot \lim_{z \to c} g(z),$$
$$\lim_{z \to c} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z \to c} f(z)}{\lim\limits_{z \to c} g(z)} \quad (\text{ただし } \lim_{z \to c} g(z) \neq 0 \text{ とする}).$$

証明 (方針のみ)　微積分で実多変数関数の場合の命題を学んでいると思う。それらと同様に証明できる。

別証明 (方針のみ)　対応する実 2 変数関数 (実部、虚部) を考えて、その極限の性質に帰着させることも出来る。 例えば、$f = u_1 + iv_1$, $g = u_2 + iv_2$, $fg = u_3 + iv_3$ とするとき、

$fg = (u_1 + iv_1)(u_2 + iv_2) = u_3 + iv_3$ より $u_3 = u_1u_2 - v_1v_2$, $v_3 = u_1v_2 + v_1u_2$ であり、u_3 と v_3 は、u_1, u_2, v_1, v_2 から和・差・積で出来ているので収束する。ゆえに fg は… □

系 2.6. 連続な複素関数の和・差・積・商 (ただし商の場合は分母が 0 にならない範囲で考える) は連続である。

この応用、あるいは系として、以下が得られる。

複素係数の多項式

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n \quad (a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_n \text{ は複素数の定数})$$

に対して多項式関数 $P\colon \mathbb{C} \ni z \mapsto P(z) \in \mathbb{C}$ は連続である。

z を変数とする複素係数多項式全体の集合を $\mathbb{C}[z]$ で表す。

複素係数の有理式

$$r(z) = \frac{q(z)}{p(z)} \quad (p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z],\, p(z) \neq 0)$$

に対して、有理関数 $r\colon \Omega \ni z \mapsto r(z) \in \mathbb{C}$, $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid\ p(z) \neq 0\}$ は連続である。

2026/10/13 の講義はこの辺までです。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/complex2026.pdf (2014〜).

[2] 桂田祐史：数学解析, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/kaiseki-2021/kaiseki-2021.pdf (2014 年〜).

[3] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), 微積分の重積分・級数までの詳しい解説 (しばしば辞書的といわれる)。丸善 eBook では、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843 でアクセスできる. この eBook まともな目次を付けてほしい.