複素関数・同演習 第 5 回

〜n 乗根 (やり残し), 複素関数の実部・虚部 〜

桂田 祐史 (かつらだ まさし)
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/

2026 年 10 月 7 日, 2026 年 10 月 20 日

目次

0 本日の内容・連絡事項 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
1 複素数の定義と基本的な性質 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
1.11 n 乗根 (続き) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
1.11.1 定義と極形式表示 (再掲) ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
1.11.2 ± 1 の n 乗根 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 3
1.11.3 よくあるよくない解答 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 6
1.11.4 補足 $\sqrt[n]{c}$ という記号について ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 6
1.11.5 余談 1: 定木とコンパスによる正 n 角形の作図 (円周の等分) ・・・・・ 7
1.11.6 余談 2: $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$ を求めて ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 8
1.11.7 遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く ・・・・・・・・・・・・ 8
1.12 $\mathbb{C}$ の距離、複素数列の収束 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 9
参考文献 ・・ 10

0 本日の内容・連絡事項

- 講義ノート [1] の §1.11, 1.12 を解説する。n 乗根の計算は (特に 1, -1 の n 乗根について) きちんとマスターすること。
- それが終わり次第第 2 章に入る。ここからは新しく学ぶものばかり、と考えて下さい。
- 宿題 2 を出します (締め切りは 10 月 13 日 13:30。「複素関数演習」のレポートを見て下さい。)

1　複素数の定義と基本的な性質 (続き)

1.11　n 乗根 (続き)

1.11.1　定義と極形式表示 (再掲)

平方根ほど簡単ではないけれど…一応存在は確かめられる。

定義 1.11 (n 乗根)**.** $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$ とするとき、

$$z^n = c \tag{1.1}$$

を満たす z を c の n **乗根** (an n-th root of c) と呼ぶ。

$n = 2$ のとき**平方根** (square root)、$n = 3$ のとき**立方根** (cube root) と呼ぶ。

$c = 0$ のとき、c の n 乗根は 0 のみである。

一応注意しておく　複素数の平方根は、必ず実数の $\sqrt{\ }$ で表せた (定理 2.2)。しかし複素数の n 乗根は、n が 2 の冪であるときは例外として、それが出来ることは期待できない (この問題には深入りしない)。例えば 3 乗根を求めるために $(x + yi)^3 = a + bi$ を解こうとしても行き詰まる。 □

その他　**冪根** (べきこん), 累乗根 (るいじょうこん) という言葉もあるが、ここでは使わない (n を指定しないとあまり意味が無いので)。 □

極形式を用いると n 乗根は容易に求まる。次の定理はマスターすること。

定理 1.12 (複素数の n 乗根)**.** $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ とする。

$$c = \rho e^{i\phi} \quad (\rho > 0,\ \phi \in \mathbb{R}) \tag{1.2}$$

とおくとき、c の相異なる n 乗根は n 個存在し、それらは

$$\sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1) \tag{1.3}$$

である。これらは複素平面上で、原点中心、半径 $\sqrt[n]{\rho}$ の円周の n 等分点である。

(求め方を示すだけでなく、存在することを証明してあるのが重要。)

この定理は、公式を暗記するだけでなく、自力で導出できるようにしておくのが望ましい (ちゃんと出来ない人がとても多い)。

(証明は前回やったので今回は省く。)

問　$\sqrt[n]{\rho}$ は何であるか、説明せよ。(ヒント: $y = x^n$, $y = \rho$ のグラフを考える。)

系 1.13 (1 の n 乗根). $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ とする。1 の n 乗根は

$$e^{ik\frac{2\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

の n 個である。これらは、$\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ とおくと次のように表せる。

$$\omega^k \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

これは単位円周の n 等分点である。

(直接証明も簡単。n 乗すると 1 になり、全部で n 個。n 次方程式なので解のすべて。)

これから

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\omega)\cdots(z-\omega^{n-1}).$$

また定理 1.12 の z は次のように表せる。

$$z = \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\phi}{n}}\omega^k \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

これは意味が鮮明 ($\sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\phi}{n}}$ は n 乗すると確かに $c = \rho e^{i\phi}$. それに ω^k がかかっている)。

特に -1 の n 乗根は、$e^{i\frac{\pi}{n}}\omega^k$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ と表せる。ω は便利である。

平方根の定理と n 乗根の定理を比較する。

- 平方根は “2 乗根” なので、カバーする範囲は後者が広い。
- 前者は、c の実部・虚部から平方根の実部・虚部を得る。$\sqrt{\text{非負実数}}$ を用いる。
- 後者は、c の極形式から n 乗根の極形式を得る。
  (実部・虚部から偏角を求めるには逆三角関数が、極形式から実部・虚部を求めるには三角関数が必要になる。

2026/10/7 の講義はこの辺からです。

1.11.2 ± 1 の n 乗根

良い計算練習になるので、n が小さいとき、1 と -1 の n 乗根を求めてみよう。$z^n = 1$ と $z^n = -1$ を解く、ということでもある。(以下で説明するが、後で自分でやってみることを勧める)

$1 = 1 \cdot e^{i\cdot 0}$ だから、$z^n = 1$ の解は $z = \sqrt[n]{1}e^{i\left(\frac{0}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ $(k = 0, \cdots, n-1)$.

$-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ だから、$z^n = -1$ の解は $z = \sqrt[n]{1}e^{i\left(\frac{\pi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$ $(k = 0, \cdots, n-1)$.

このように極形式で表すことは、定理 1.12 の直接的適用であるが、実数の根号 $\sqrt[n]{\ }$ で表せるときはそうして見よう。

(1) $n = 2$ のとき。

$z^2 = 1$ の解は $e^{i\cdot k\frac{2\pi}{2}} = e^{ik\pi}$ $(k = 0, 1)$ であるから $e^0 = 1$, $e^{i\pi} = -1$.

これは

$$z^2-1=(z+1)(z-1)$$

と因数分解できることからも分かる。

$z^2=-1$ の解は $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{2}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2}}$ $(k=0,1)$ であるから、$e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i$.

これは

$$z^2+1=(z+i)(z-i)$$

と因数分解できることからも分かる。

2. $n=3$ のとき。

$z^3=1$ の解は $z=e^{i\cdot k\frac{2\pi}{3}}$ $(k=0,1,2)$ であるから、$e^0=1$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

一方、

$$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$$

という因数分解で、右辺の第 2 因数の根は (2 次方程式の解として) $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ と求まるから)

$$z^3-1=(z-1)\left(z-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

$z^3=-1$ の解は $z=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}}$ $(k=0,1,2)$ であるから、$e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{3\pi}{3}}=-1$, $e^{i\frac{5\pi}{3}}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

また因数分解も上と同様に

$$z^3+1=(z+1)(z^2-z+1)=(z+1)\left(z-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

- $n=4$ のとき。

$z^4=1$ の解は $z=e^{ik\frac{2\pi}{4}}=e^{ik\frac{\pi}{2}}$ $(k=0,1,2,3)$ であるから、$e^0=1$, $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{i\pi}=-1$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}=-i$.

因数分解からも分かる。実際

$$z^4-1=(z^2+1)(z^2-1)=(z+i)(z-i)(z+1)(z-1).$$

$z^4=-1$ の解は $z=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}$ $(k=0,1,2,3)$ であるから、

$$e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad e^{i\frac{3\pi}{4}}=\frac{-1+i}{\sqrt{2}},\quad e^{i\frac{5\pi}{4}}=\frac{-1-i}{\sqrt{2}},\quad e^{i\frac{7\pi}{4}}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

一方、

$$z^4+1=(z^2+i)(z^2-i).$$

と因数分解して、$z^2=-i$, $z^2=i$ を解けなくもないが (平方根の計算は出来るはず)、そうするよりも

$$\begin{aligned}z^4+1&=z^4+2z^2+1-2z^2=\left(z^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}z\right)^2\\&=\left(z^2+\sqrt{2}z+1\right)\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)\end{aligned}$$

と因数分解すれば、2 つの 2 次方程式の根として簡単に求まる。

$$z=\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}\quad(\text{上の結果と一致}).$$

(3) $n=5$ のとき。

$z^5=1$ の解は $z=e^{ik\frac{2\pi}{5}}$ $(k=0,1,\cdots,4)$ であるから、$e^0=1$, $e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $e^{i\frac{8\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{\ }$ を使って表現可能である。

(以下の計算に注目)

$$z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$$

であるが、

$$\begin{aligned}z^4+z^3+z^2+z+1=0 &\Leftrightarrow z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0\\ &\Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+z+\frac{1}{z}-1=0.\end{aligned}$$

$X=z+\frac{1}{z}$ とおくと、$X^2+X-1=0$ で、この解は $X=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned}&z+\frac{1}{z}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\quad\vee\quad z+\frac{1}{z}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\\ &\Leftrightarrow 2z^2+(1-\sqrt{5})z+2=0\quad\vee\quad 2z^2+(1+\sqrt{5})z+2=0.\end{aligned}$$

ゆえに

$$z=1,\frac{-(1-\sqrt{5})\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\frac{-(1+\sqrt{5})\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

一方、$z^5=-1$ の解は $z=e^{i\left(\frac{\pi}{5}+k\frac{2\pi}{5}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}}$ $(k=0,1,\cdots,4)$ であるから、$e^{i\frac{\pi}{5}}$, $e^{i\frac{3\pi}{5}}$, $e^{i\frac{5\pi}{5}}=-1$, $e^{i\frac{7\pi}{5}}$, $e^{i\frac{9\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{\ }$ を使って表現可能である。

$$z^5+1=(z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1)$$

であるが、

$$\begin{aligned}z^4-z^3+z^2-z+1=0 &\Leftrightarrow z^2-z+1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0\\ &\Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0.\end{aligned}$$

$X=z+\frac{1}{z}$ とおくと、$X^2-X-1=0$ で、この解は $X=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned}&z+\frac{1}{z}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\quad\vee\quad z+\frac{1}{z}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ &\Leftrightarrow 2z^2-(1+\sqrt{5})z+2=0\quad\vee\quad 2z^2-(1-\sqrt{5})z+2=0.\end{aligned}$$

ゆえに

$$z=-1,\ \frac{(1+\sqrt{5})\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\ \frac{(1-\sqrt{5})\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

($n=5$ を振り返り: 代数的に解くことで $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$ の cos, sin が求まるのは注目に値する。)

- $n=6$ のとき。これは宿題にすることがあるので、ここには書かない。
- $n=7$ のとき。

  $z^7=1$ の解は $e^{ik\frac{2\pi}{7}}$ $(k=0,1,\cdots,6)$ であるから、$e^0=1$, $e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $e^{i\frac{4\pi}{7}}$, $e^{i\frac{6\pi}{7}}$, $e^{i\frac{8\pi}{7}}$, $e^{i\frac{10\pi}{7}}$, $e^{i\frac{12\pi}{7}}$.

  $z^7=-1$ の解は $e^{i\left(\frac{\pi}{7}+k\frac{2\pi}{7}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{7}}$ $(k=0,1,\cdots,6)$ であるから、$e^{i\frac{\pi}{7}}$, $e^{i\frac{3\pi}{7}}$, $e^{i\frac{5\pi}{7}}$, $e^{i\frac{7\pi}{7}}=-1$, $e^{i\frac{9\pi}{7}}$, $e^{i\frac{11\pi}{7}}$, $e^{i\frac{13\pi}{7}}$.

  これらは (1, -1 を除いて)、$\sqrt{\ }$ を使うことで表せないことが知られている (そういう問題を一般的に解決したのは Gauss である)。
- $n=8$ のとき。これも宿題にすることがあるので、ここには書かない。 □

1.11.3 よくあるよくない解答

(これは 2026/10/6 の段階で時間の穴埋めで説明した。)

この講義では、n 乗根を求めなさい、という問題について、特に指定をしない限り、定理 5.3 の公式に当てはめて求めれば OK、とする。(2 次方程式の問題で、解の公式に代入して解を求めれば良い、というのに似ている。場合によっては、解の公式を導出させる問題があるかもしれないが、一方で公式を正確に使えることも重要である。)

ところが次のような答案を書いて悩ませてくれる人が少なくない。例えば「$z^5=1$ の解を求めよ」という問に対して

$$z^5=1=1e^{i\cdot 0}=e^{2k\pi i}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

であるから

$$z=e^{\frac{2k\pi i}{5}}\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

ゆえに

$$z=e^{\frac{2k\pi i}{5}}\quad(k=0,1,2,3,4).$$

これは結果は正しいけれど、論理が破綻しているので (「行間を埋められますか？」と尋ねたくなる) 非常に抵抗を感じて、減点したくなって来る。

1.11.4 補足 $\sqrt[n]{c}$ という記号について

(混乱する人がいるかもしれないので、まとめておく。)

$c\in\mathbb{R}$ の場合は、記号 $\sqrt[n]{c}$ について、多くの人が認めるルールがある。

- n が奇数のとき、任意の実数 c に対して $x^n = c$ を満たす実数 x がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。
- n が偶数のとき、任意の $c \geq 0$ に対して、$x^n = c$ を満たす実数 $x \geq 0$ がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。

  $c < 0$ のときは？$n = 2$ のとき $\sqrt[n]{c} = \sqrt{c} = \sqrt{-c}i$ とするのが、高校数学のルールであったが、この講義では $\sqrt[n]{c}$ の一般的定義はしないことにする ($n = 2$ のときの真似 (？) をして、$\sqrt[n]{|c|}e^{i\pi/n}$ と定義する手はあるが…)。

c が虚数のとき、$\sqrt[n]{c}$ が、c の n 個の n 乗根のうちどれを表すか決めるための、一般的に使える良いルールがない。だからこの講義では無理にルールは決めないことにする。後で $w = \sqrt[n]{z}$ という関数の話をするので、そのときもう一度取り上げる。$\sqrt[n]{c}$ を使うときは、その都度適当なルールを選ぶこと。

2 次方程式の解の公式を使う場合、($\pm\sqrt{D}$ の形なので) どのルールでも問題ない。

(話が細かいので、スルー可。Cardano の公式に興味がある人、前のスライドで $\sqrt[n]{c}$ の定義についてうるさいことを言っているけれど必要があるの？、という人は読んで下さい。)

具体的な問題として、3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ に対する Cardano の公式

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}, \quad \Delta := -\left(27q^2 + 4p^3\right) \tag{1.4}$$

を取り上げる。簡単のため、まず $p, q \in \mathbb{R}$ の場合を考える。

$\Delta \leq 0$ の場合は、$\sqrt{\text{非負実数}}$ と $\sqrt[3]{\text{実数}}$ しか出て来ない。前のスライドに書いたルールで解釈して問題がない (ことが分かる)。

$\Delta > 0$ の場合は、$\sqrt{\text{負の実数}}$ と $\sqrt[3]{\text{虚数}}$ が現れて、その値をどう選択するか問題となる。(1.4) に 2 つある $\sqrt[3]{\ }$ の値は、$\sqrt[3]{\ }\sqrt[3]{\ } = -\frac{p}{3}$ を満たすように選ばないと、x は 3 次方程式の解にならない。それを考えると、(1.4) はむしろ

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \frac{-p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}}$$

と書く方がいいのかもしれない (もちろん $\sqrt[3]{\ } = \sqrt[3]{\ }$ とする)。

p, q が虚数の場合も、$\sqrt[3]{\ }$ の値の選択をきちんとすれば、(1.4) の x は解となる。

以下の余談等は講義ではスキップして、1.12 に飛んだ。

1.11.5 余談 1: 定木とコンパスによる正 n 角形の作図 (円周の等分)

以上の話は、定木とコンパスによる正 n 角形の作図と関係がある。

Gauss (1777–1855) は、定木とコンパスで正 n 角形が作図できるためには、n が

$$n = 2^k \times \text{相異なるフェルマー素数 } F_m \text{ の積}$$

の形をしていることが必要十分であることを証明し (1801 年発表)、$n = 17 = F_2$ のときの作図法を示した (発見は 1796 年)。

つまり正 17 角形は作図可能である[1)]。これは有名な話で多くの本に載っているが、参考文献として、高木 [2], 栗原 [3] をあげておく。

フェルマー素数とは、**フェルマー数** $F_m := 2^{2^m} + 1$ のうち、素数であるもののことである。$F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ はフェルマー素数であるが、F_5 は素数でない ($F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ と素因数分解出来ることを Euler (1707–1783) が発見した)。

定木とコンパスで作図可能となる n は、小さい順に $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, \cdots$. □

定規とコンパスで任意の角の二等分ができるので 2^k がつくが、任意の角の三等分は出来ないので、2 つ以上の 3 があったら出来ない。

1.11.6 余談 2: $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$ を求めて

高校で、30°, 45°, 60° の sin, cos の値を学んだ。正五角形の作図も良く出て来る問題で、36°, 72° の sin, cos の値も求めたことがあるかもしれない (大学入試のネタになるし、± 1 の 5 乗根にも現れる)。これらは $\sqrt{\ }$ を使って表せる。

半角の公式を使うと、18°, 15° の sin, cos も $\sqrt{\ }$ で表せる。加法定理を使うと、$18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$ の sin, cos も $\sqrt{\ }$ で表せることが分かる。

それでは 1° の sin, cos はどうだろう？もしこれが $\sqrt{\ }$ で表されれば、任意の自然数 n に対して n° の sin, cos が $\sqrt{\ }$ で表される。

この問題は、「角の三等分」とも関係があり、(結論を天下りに述べると) 1° の sin, cos を $\sqrt{\ }$ で表すことは出来ないことが知られている。

アル・カーシー (ジャムシード・ギヤースッディーン・アル・カーシー, 1380–1429, ペルシャの数学者・天文学者) は、3 次方程式 $\sin 3^\circ = 3x - 4x^3$ を数値的に解くことによって ($\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ に注意)、$\sin 1^\circ$ を求めた (カッツ [4])。

1.11.7 遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く

Mathematica で 3 乗根を求めてみよう。$z^3 = i$ を解くには

---

1) $\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16}\left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\right) = 0.932472229404355\cdots$.

```
ComplexExpand[Solve[z^3==I,z]]
```
あるいは $((x+yi)^3 = i$ を解くことにして)
```
Solve[{x^3-3x y^2==0,3x^2 y-y^3==1},{x,y},Reals]
```

この解は実数の $\sqrt[3]{\ }$ で表せる $(z = -i, \dfrac{\pm\sqrt{3}+i}{2})$。

ところが $z^3 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ はうまく行かない。(この辺は角の三等分とも関係する。30° の三等分は、実数の $\sqrt[3]{\ }, \sqrt{\ }$ では表せない。三角関数を使って答えを表す。)

一方、これを書いているときに気づいたのだけど、今の Mathematica は、$z^{17} = 1$ を $\sqrt{\ }$ で解けるようになっている (Mathematica 12 で確認)。

```
ComplexExpand[Solve[z^17==1,z]]
ToRadicals[%]
```
(怖いもの見たい人はやってみましょう。)

(そのうち Mathematica が $z^{257} = 1$ を解けるようになるだろうか？)

前のスライドの最後の結果はごちゃごちゃしているけれど、本当に 17 等分点だろうか？

```
g0 = ContourPlot[x^2 + y^2 == 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
plotpoints[l_]:=Show[g0,ListPlot[l,PlotStyle->Directive[Red,PointSize[Large]]]]
points17={Re[z],Im[z]}/.ToRadicals[ComplexExpand[Solve[z^17==1,z]]]
regular17gon=plotpoints[points17]
```

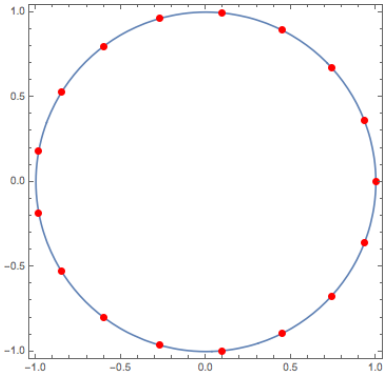


図 1　$z^{17} = 1$ の解を図示

1.12　$\mathbb{C}$ の距離、複素数列の収束

一言でまとめると: $\mathbb{R}^2$ **と同じ**。

複素数列の収束は $\mathbb{R}^2$ の点列の収束と同じで、実部・虚部の作る数列の収束と同じ。$\mathbb{R}^2$ については「知っている」ことになっているので、$\mathbb{C}$ についても「同様に分かる」ことにする。

任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ となる x, y を取って、$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと、$\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2$ であり

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\boldsymbol{z}|\,.$$

これから、$\mathbb{C}$ における 2 点の距離と、$\mathbb{R}^2$ における対応する 2 点の距離は等しい:

$$|z_1 - z_2| = |\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2| .$$

$\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ は距離まで込めて対応している。

複素数列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{C}$ に対して、

$$x_n := \operatorname{Re} z_n,\ y_n := \operatorname{Im} z_n,\ \boldsymbol{z_n} := \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},\ a := \operatorname{Re} c,\ b := \operatorname{Im} c,\ \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とおくと、$\{\boldsymbol{z}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^2$ の点列, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2$ であり、

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty} |z_n - c| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{z}_n - \boldsymbol{c}| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{z}_n = \boldsymbol{c}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

2026/10/7 の講義はここまでです。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/complex2026.pdf (2014〜).

[2] 高木貞治：近世数学史談及雑談, 共立出版 (1946), 1996 年に「近世数学史談・数学雑談 復刻版」として復刻されている。 また 1995 年に岩波文庫に「近世数学史談」が入った。

[3] 栗原将人：ガウスの数論世界をゆく: 正多角形の作図から相互法則・数論幾何へ, 数学書房 (2017/5/15).

[4] ヴィクター J. カッツ：カッツ 数学の歴史, 共立出版 (2005), 上野 健璽・三浦伸夫 監訳, 中根美千代・高橋秀裕・林知宏・大谷卓史・佐藤賢一・東慎一郎・中澤聡 翻訳. 原著は、Victor J. Katz, A History of Mathemaitcs, A: An Introdunction, Second Edition, Addison Wesley Longman (1998).