

複素関数・同演習 第 4 回

～複素指数関数 (やり残し), 極形式, n 乗根～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/>

2026 年 10 月 6 日, 2026 年 10 月 6 日

目次

0	本日の内容・連絡事項	2
0.1	本日の内容	2
0.2	宿題について	2
1	複素数の定義と基本的な性質 (続き)	2
1.8	複素指数関数 (続き)	2
1.9	極形式	3
1.9.1	定義	3
1.9.2	偏角	4
1.9.3	極形式と偏角の例	4
1.10	演算の幾何学的解釈	6
1.10.1	和と積	6
1.10.2	原点の周りの回転	7
1.11	n 乗根	7
1.11.1	定義と極形式表示	7
1.11.2	± 1 の n 乗根	9
1.11.3	よくあるよくない解答	12
1.11.4		12
1.11.5	余談 1: 定木とコンパスによる正 n 角形の作図 (円周の等分)	13
1.11.6	余談 2: $\sin 1^\circ, \cos 1^\circ$ を求めて	14
1.11.7	遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く	14
1.12	$\mathbb{C}$ の距離、複素数列の収束	14
2	複素関数とその極限、連続性、正則性	15

2.1	複素関数の実部・虚部	15
2.1.1	定義	15
2.1.2	例	16
3	参考文献	17

0 本日の内容・連絡事項

0.1 本日の内容

- 宿題の提出率は 81% …べ切まで後 1 時間だけど。解答 PDF を公開するつもりだったけれど、初回だし、もう一日待つかなあ。
- 本日は、複素指数関数について前回の残りど、それから極形式、 n 乗根の話をしてします (これで高校数学は終わりかな)。講義ノート [1] の §1.9~1.11 の内容を解説する。

0.2 宿題について

- テストをしているつもりはないので、気軽に質問して下さい。また (答えの丸写しはまずいけれど) 友人同士で相談しても構いません。「学習相談」というのもある (月曜 10:30~12:30, 火曜 12:30~14:30, 水曜 11:30~13:30, 1 階ラーニングラウンジ内の学習支援コーナー)。
- 「この科目の TA に質問できる？」TA には宿題の 1 次チェックをやってもらっている。質問は学習相談ですか、私相手にすること。
- 宿題 1 は単純な計算なので、WWW で解答を公開する。フィードバックは…

1 複素数の定義と基本的な性質 (続き)

1.8 複素指数関数 (続き)

$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ と $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ を、 $\cos \theta, \sin \theta$ についての連立方程式として解くと

$$(1.23) \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

しょっちゅう出て来るので、そのうち慣れるはず。最後には覚える、と覚悟する。

絶対値については、 $|e^z| = |e^x e^{iy}| = |e^x| |e^{iy}| = e^x \cdot 1 = e^x$ であるから

$$(1.24) \quad |e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}.$$

(板書を間違えたかもしれない。念のため書く次第。)

$$(1.25) \quad (e^z)^n = e^{nz} \quad (n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}).$$

実際、 $n = 0$ の場合は、両辺とも 1 であるから、成立する。 $n \in \mathbb{N}$ の場合は、一般に

$$e^{z_1+z_2+\cdots+z_n} = e^{z_1}e^{z_2}\cdots e^{z_n}$$

が成り立つことから、 $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ のとき $e^{nz} = (e^z)^n$ 。 $n < 0$ のときは、 $n = -m$ とすると、 $e^{nz} = e^{-mz} = \frac{1}{e^{mz}} = \frac{1}{(e^z)^m} = (e^z)^{-m} = (e^z)^n$ 。 $\square$

特に $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ に対して $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ 。 すなわち

$$(1.26) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (\text{ド・モアブルの公式}).$$

(結局は三角関数の加法定理と帰納法で、高校の時と本質的に同じ証明である。)

注意 1.1 (一般の冪). 一般の冪 a^b はまだ定義していない (しばらく待って下さい)。実は $(a^b)^c = a^{bc}$ の形の指数法則は一般には成り立たない。(1.25) は、その形の指数法則とはみなさない方がよい。 $\square$

1.9 極形式

1.9.1 定義

複素数を極座標で表した式のことを**極形式** (polar form) とよぶ。

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ とするとき、

$$(\exists r \geq 0)(\exists \theta \in \mathbb{R}) \quad (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

が成り立つ。この r, θ を (x, y) の**極座標**という。

- r は一意的に定まる: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。
 - θ は、 $r > 0$ のとき (いいかえると $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき) 2π の整数倍の不定差を除いて定まる。 $r = 0$ のとき、 θ は何でもよい。
- $0 \leq \theta < 2\pi$ や $-\pi < \theta \leq \pi$ のように条件をつけると (もっと一般に、任意に選んだ α に対して、 $\alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi$ あるいは $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$ という条件を課すと)、一意的に定まる。

—— 以上は高校生も知っている (はずの) こと。

$z \in \mathbb{C}$ とすると、

$$(1.27) \quad (\exists r \geq 0)(\exists \theta \in \mathbb{R}) \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}.$$

この式 ($z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ あるいは $z = re^{i\theta}$) を z の**極形式**という。なるべく後者を使うこと (慣れて欲しいから、その方が誤解を招きにくいから)。

1.9.2 偏角

$z \in \mathbb{C}$ に対して、 $r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$ が $z = re^{i\theta}$ を満たしているとする。

$r = |z|$ である。

$z \neq 0$ のとき、 θ は 2π の不定差を除いて定まる。 θ を z の **偏角** (an argument of z) とよび、 $\arg z$ と表す。

1つの実数として定まらないので、やや曖昧なところがある。

範囲を $-\pi < \theta \leq \pi$ と限定したとき、ただ1つに定まる。それを $\text{Arg } z$ と書き、 z の **偏角の主値** (the principal argument of z) とよぶ。

$r_1, r_2 > 0, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$(1.28) \quad r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow r_1 = r_2 \wedge (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi.$$

後者 (青い部分) は $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$ と表せる。

(1.28) の証明 $\Leftarrow$ は当たり前。 $\Rightarrow$ はまず絶対値を取って $r_1 = r_2$. それを代入して割り算して $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$. これから $(\exists k \in \mathbb{Z}) \theta_1 - \theta_2 = k \cdot 2\pi$. $\square$

注意 1.2. 何か1つに値を選ぶ方法には、主値以外にも色々ある。大抵は、 $\alpha \in \mathbb{R}$ を定めて、偏角を $(\alpha, \alpha + 2\pi]$ から選ぶ、あるいは $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ から選ぶようにする。例えば主値は、 $\alpha = -\pi$ で後者、つまり $(-\pi, \pi]$ から選んでいる。

主値以外では、 $[0, 2\pi)$ から選ぶことが多い。 $\square$

合同式のおさらい (?) 偏角は合同式で考えよう

合同式は、普通は、次のように整数の話として習うことが多い。

$a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ とするとき

$$a \equiv b \pmod{m} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad a - b = mk.$$

このとき、 a と b は m を法として**合同である** (a and b are congruent modulo m , a is congruent to b modulo m) という。

要するに a, b を m で割ったときの余りが一致する、ということである。

整数の話でない場合も良く使われる。水色の部分が要点である。

1.9.3 極形式と偏角の例

例 1.3. 以下の z_j の極形式と $\text{Arg } z_j$ を求めてみよう。

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_4 = 1 - \sqrt{3}i.$$

どの j についても、 $|z_j| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

$$z_1 = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}, \quad \text{Arg } z_1 = \frac{\pi}{3},$$

以下同様に

$$\begin{aligned} z_2 &= 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}, \quad \text{Arg } z_2 = \frac{2\pi}{3}, \\ z_3 &= 2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2e^{\frac{4\pi}{3}i} = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}, \quad \text{Arg } z_3 = -\frac{2\pi}{3}, \\ z_4 &= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}, \quad \text{Arg } z_4 = -\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

例 1.4. 以下の z_j の極形式と $\text{Arg } z_j$ を求めてみよう。

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 + i, \quad z_3 = -1 - ii, \quad z_4 = 1 - i.$$

(まずは絶対値の計算から始める。) どの j についても、 $|z_j| = \sqrt{(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad \text{Arg } z_1 = \frac{\pi}{4} \\ (\cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ となる } \theta \text{ を探した。}) \end{aligned}$$

以下同様に

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}, \quad \text{Arg } z_2 = \frac{3\pi}{4}, \\ z_3 &= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i} = \sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}, \quad \text{Arg } z_3 = -\frac{3\pi}{4}, \\ z_4 &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i} = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}, \quad \text{Arg } z_4 = -\frac{\pi}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

注意 1.5 (期末試験間違いコレクションから). $-1 + \sqrt{3}i$ の極形式は? 答えは一つではない。次は間違いである。

$$-1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

なぜ? 正しい等式であるが、 $\frac{2}{3}\pi$ と $\frac{\pi}{3}$ が一致していないのがマズい。書くところが2つあると、別のものを書いてしまうことがある…

$z = re^{i\theta}$ とするとき、 $\bar{z}$ の極形式は? $\bar{z} = re^{-i\theta}$. これは OK.

しかし

$$\bar{z} = r (\cos \theta - i \sin \theta)$$

は正しい等式だが極形式ではない。マイナス $-$ はマズい。

$$\bar{z} = r (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

は極形式として正しい。

ということもあって、極形式の三角関数バージョンは避けよう、と言ってます。

例題 $r, \theta \in \mathbb{R}$, $z = re^{i\theta}$ とするとき、 z の極形式を求めよ。

(ひっかけ問題のように思えるかもしれないけれど…意外と大事なこと。)

解答 $r \geq 0$ の場合は、 $z = re^{i\theta}$ は z の極形式である。

$r < 0$ の場合は、 $r = (-r) \cdot (-1) = (-r)e^{i\pi}$ であるから

$$z = re^{i\theta} = (-r)e^{i\pi} \cdot e^{i\theta} = (-r)e^{i(\theta+\pi)}$$

であり、 $-r > 0$, $\theta + \pi \in \mathbb{R}$ であるから、 $z = (-r)e^{i(\theta+\pi)}$ が z の極形式である。 □

1.10 演算の幾何学的解釈

1.10.1 和と積

和は平行四辺形ルール ($\mathbb{R}^2$ のベクトルと同じ)。

積は極形式と相性が良い。**積の絶対値は絶対値の積、積の偏角は偏角の和。**

(本当は「偏角の和は積の偏角である」とすべき。)

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad (r_1, r_2 > 0; \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})$$

とすると

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

これが $z_1 z_2$ の極形式である。

ゆえに

$$(1.29) \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|,$$

$$(1.30) \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \quad (\text{要注意の式}).$$

第2式は注釈が必要。 $\arg$ は1つの数を表すのではないことに注意する。これは

$$(1.31) \quad \arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$$

のように、すなわち、

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \arg(z_1 z_2) - (\arg z_1 + \arg z_2) = 2k\pi.$$

と解釈すべきである (「 2π の整数倍の差を除いて一致する」)。

例えば

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2$$

は**はっきり間違い**である ($-\pi < \text{Arg} \leq \pi$ に注意)。これも

$$\text{Arg}(z_1 z_2) \equiv \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 \pmod{2\pi}$$

は正しい。

1.10.2 原点の周りの回転

特に $e^{i\theta}$ をかけると、複素平面で原点を中心とする角度 θ の回転をすることになる。

$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とするとき

$$\begin{aligned} e^{i\theta} z &= e^{i\theta} (x + yi) = (\cos \theta + i \sin \theta)(x + yi) \\ &= x \cos \theta - y \sin \theta + (x \sin \theta + y \cos \theta)i. \end{aligned}$$

Cf. (行列を用いた回転)

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$

1.11 n 乗根

1.11.1 定義と極形式表示

平方根ほど簡単ではないけれど…一応存在は確かめられる。

定義 1.11 (n 乗根). $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$ とするとき、

$$(1.32) \quad z^n = c$$

を満たす z を c の n 乗根 (an n -th root of c) と呼ぶ。

$n = 2$ のとき**平方根** (square root)、 $n = 3$ のとき**立方根** (cube root) と呼ぶ。

$c = 0$ のとき、 c の n 乗根は 0 のみである。

一応注意しておく 複素数の平方根は、必ず実数の $\sqrt{}$ で表せた (定理 2.2)。しかし複素数の n 乗根は、 n が 2 の冪であるときは例外として、それが出来ることは期待できない (この問題には深入りしない)。例えば 3 乗根を求めるために $(x + yi)^3 = a + bi$ を解こうとしても行き詰まる。

その他 ^{べきこん}**冪根**, ^{るいじょうこん}**累乗根** という言葉もあるが、ここでは使わない (n を指定しないとあまり意味が無いので)。

極形式を用いると n 乗根は容易に求まる。次の定理はマスターすること。

定理 1.12 (複素数の n 乗根). $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, c \in \mathbb{C}, c \neq 0$ とする。

$$(1.33) \quad c = \rho e^{i\phi} \quad (\rho > 0, \phi \in \mathbb{R})$$

とおくとき、 c の相異なる n 乗根は n 個存在し、それらは

$$(1.34) \quad \sqrt[n]{\rho} e^{i(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}k)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

である。これらは複素平面上で、原点中心、半径 $\sqrt[n]{\rho}$ の円周の n 等分点である。

(求め方を示すだけでなく、存在することを証明してあるのが重要。)

この定理は、公式を暗記するだけでなく、自力で導出できるようにしておくのが望ましい (ちゃんと出来ない人がとても多い)。

問 $\sqrt[n]{\rho}$ は何であるか、説明せよ。(ヒント: $y = x^n$ のグラフを考える。)

証明 $z = r e^{i\theta}$ ($r > 0, \theta \in \mathbb{R}$) とおくと

$$z^n = c \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi} \Leftrightarrow (r^n = \rho \wedge e^{in\theta} = e^{i\phi}).$$

(注 $r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi}$ の両辺の絶対値を取って $r^n = \rho$ を得るのが $\Rightarrow$ のポイント。)

$\rho > 0, r > 0$ に注意すると、 $r^n = \rho \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{\rho}$ が分かる。もう一方から

$$\begin{aligned} e^{in\theta} = e^{i\phi} &\Leftrightarrow n\theta \equiv \phi \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad n\theta - \phi = k \cdot 2\pi \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \theta = \frac{\phi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} z^n = c &\Leftrightarrow \left(r = \sqrt[n]{\rho} \wedge (\exists k \in \mathbb{Z}) \theta = \frac{\phi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad z = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\frac{\phi}{n} + k \frac{2\pi}{n})}. \end{aligned}$$

(一見無限個の解があるように思うかもしれないが) k が n 増えると元に戻る (周期 n) ので、 $k = 0, 1, \dots, n-1$ だけで重複なく、漏れもない。 $\square$

余談 1.13 (別証明). (答えを知っていれば、手短な議論が出来る。)

$$z = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}k)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

はいずれも $z^n = \rho e^{i\phi}$ を満たす。また、これらは $\rho > 0$ のとき相異なる。複素係数の多項式についても因数定理が成り立つので (一般に可換体の要素を係数とする多項式について因数定理が成り立つ)、 n 次方程式は $n+1$ 個以上の解は持たない。ゆえに、これらが $z^n = \rho e^{i\phi}$ のすべての解である。 $\square$

系 1.14 (1 の n 乗根). $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ とする。1 の n 乗根は

$$e^{ik\frac{2\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

の n 個である。これらは、 $\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ とおくと次のように表せる。

$$\omega^k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

これは単位円周の n 等分点である。

これから

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - \omega) \cdots (z - \omega^{n-1}).$$

また定理 1.12 の z は次のように表せる。

$$z = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\phi}{n}} \omega^k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

特に -1 の n 乗根は、 $e^{i\frac{\pi}{n}} \omega^k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) と表せる。 ω は便利である。

1.11.2 ± 1 の n 乗根

良い計算練習になるので、 n が小さいとき、1 と -1 の n 乗根を求めてみよう。 $z^n = 1$ と $z^n = -1$ を解く、ということでもある。(以下で説明するが、後で自分でやってみることを勧める)

$1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ だから、 $z^n = 1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i(\frac{0}{n} + k\frac{2\pi}{n})} = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ ($k = 0, \dots, n-1$).

$-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ だから、 $z^n = -1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i(\frac{\pi}{n} + k\frac{2\pi}{n})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$ ($k = 0, \dots, n-1$).

このように指数形式で表すことは、定理 1.12 の直接的適用であるが、実数の根号 $\sqrt[n]{}$ で表せるときはそうして見よう。

(1) $n = 2$ のとき。

$z^2 = 1$ の解は $e^{i \cdot k\frac{2\pi}{2}} = e^{ik\pi}$ ($k = 0, 1$) であるから $e^0 = 1$, $e^{i\pi} = -1$.

これは

$$z^2 - 1 = (z + 1)(z - 1)$$

と因数分解できることから分かる。

$z^2 = -1$ の解は $e^{i(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{2})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2}}$ ($k = 0, 1$) であるから、 $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.

これは

$$z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$$

と因数分解できることから分かる。

2. $n = 3$ のとき。

$z^3 = 1$ の解は $z = e^{i \cdot k\frac{2\pi}{3}}$ ($k = 0, 1, 2$) であるから、 $e^0 = 1$, $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

一方、

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$$

という因数分解で、右辺の第 2 因数の根は (2 次方程式の解として) $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ と求まるから)

$$z^3 - 1 = (z - 1) \left(z - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left(z - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right).$$

$z^3 = -1$ の解は $z = e^{i(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}}$ ($k = 0, 1, 2$) であるから、 $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{3\pi}{3}} = -1$, $e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

また因数分解も上と同様に

$$z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1) = (z + 1) \left(z - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left(z - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right).$$

• $n = 4$ のとき。

$z^4 = 1$ の解は $z = e^{ik\frac{2\pi}{4}} = e^{ik\frac{\pi}{2}}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) であるから、 $e^0 = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.

因数分解からも分かる。実際

$$z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1) = (z + i)(z - i)(z + 1)(z - 1).$$

$z^4 = -1$ の解は $z = e^{i(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{4})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) であるから、

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

一方、

$$z^4 + 1 = (z^2 + i)(z^2 - i).$$

と因数分解して、 $z^2 = -i$, $z^2 = i$ を解けなくもないが (平方根の計算は出来るはず)、
そうするよりも

$$\begin{aligned} z^4 + 1 &= z^4 + 2z^2 + 1 - 2z^2 = (z^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}z)^2 \\ &= (z^2 + \sqrt{2}z + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1) \end{aligned}$$

と因数分解すれば、2 つの 2 次方程式の根として簡単に求まる。

$$z = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2} \quad (\text{上の結果と一致}).$$

(3) $n = 5$ のとき。

$z^5 = 1$ の解は $z = e^{ik\frac{2\pi}{5}}$ ($k = 0, 1, \dots, 4$) であるから、 $e^0 = 1$, $e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $e^{i\frac{8\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表現可能である。

(以下の計算に注目)

$$z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

であるが、

$$\begin{aligned} z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0. \end{aligned}$$

$$X = z + \frac{1}{z} \text{ とおくと、 } X^2 + X - 1 = 0 \text{ で、この解は } X = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad z + \frac{1}{z} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow 2z^2 + (1 - \sqrt{5})z + 2 = 0 \quad \vee \quad 2z^2 + (1 + \sqrt{5})z + 2 = 0. \end{aligned}$$

ゆえに

$$z = 1, \frac{-(1 - \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-(1 + \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

一方、 $z^5 = -1$ の解は $z = e^{i(\frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}}$ ($k = 0, 1, \dots, 4$) であるから、 $e^{i\frac{\pi}{5}}, e^{i\frac{3\pi}{5}}, e^{i\frac{5\pi}{5}} = -1, e^{i\frac{7\pi}{5}}, e^{i\frac{9\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表現可能である。

$$z^5 + 1 = (z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1)$$

であるが、

$$\begin{aligned} z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0. \end{aligned}$$

$$X = z + \frac{1}{z} \text{ とおくと、 } X^2 - X - 1 = 0 \text{ で、この解は } X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad z + \frac{1}{z} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow 2z^2 - (1 + \sqrt{5})z + 2 = 0 \quad \vee \quad 2z^2 - (1 - \sqrt{5})z + 2 = 0. \end{aligned}$$

ゆえに

$$z = -1, \frac{(1 + \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{(1 - \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

($n = 5$ を振り返り: 代数的に解くことで $\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}$ の $\cos, \sin$ が求まるのは注目に値する。)

- $n = 6$ のとき。これは宿題にすることがあるので、ここには書かない。
- $n = 7$ のとき。 $z^7 = 1$ の解は $e^{ik\frac{2\pi}{7}}$ ($k = 0, 1, \dots, 6$) であるから、 $e^0 = 1, e^{i\frac{2\pi}{7}}, e^{i\frac{4\pi}{7}}, e^{i\frac{6\pi}{7}}, e^{i\frac{8\pi}{7}}, e^{i\frac{10\pi}{7}}, e^{i\frac{12\pi}{7}}$.
 $z^7 = -1$ の解は $e^{i(\frac{\pi}{7} + k\frac{2\pi}{7})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{7}}$ ($k = 0, 1, \dots, 6$) であるから、 $e^{i\frac{\pi}{7}}, e^{i\frac{3\pi}{7}}, e^{i\frac{5\pi}{7}}, e^{i\frac{7\pi}{7}} = -1, e^{i\frac{9\pi}{7}}, e^{i\frac{11\pi}{7}}, e^{i\frac{13\pi}{7}}$.

これらは $(1, -1$ を除いて)、 $\sqrt{\quad}$ を使うことで表せないことが知られている (そういう問題を一般的に解決したのは Gauss である)。

- $n = 8$ のとき。これも宿題にすることがあるので、ここには書かない。

□

1.11.3 よくあるよくない解答

この講義では、 n 乗根を求めなさい、という問題について、特に指定をしない限り、定理 5.3 の公式に当てはめて求めれば OK、とする。(2 次方程式の問題で、解の公式に代入して解を求めれば良い、というのに似ている。場合によっては、解の公式を導出させる問題があるかもしれないが、一方で公式を正確に使えることも重要である。)

ところが次のような答案を書いて悩ませてくれる人が少なくない。例えば「 $z^5 = 1$ の解を求めよ」という問に対して

$$z^5 = 1 = 1e^{i \cdot 0} = e^{2k\pi i} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

であるから

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

ゆえに

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

これは結果は正しいけれど、論理が破綻しているので (「行間を埋められますか?」と尋ねたくなる) 非常に抵抗を感じて、減点したくなって来る。

1.11.4 補足 $\sqrt[n]{c}$ という記号について

(混乱する人がいるかもしれないので、1 枚にまとめてみる。)

$c \in \mathbb{R}$ の場合は、記号 $\sqrt[n]{c}$ について、多くの人が認めるルールがある。

- n が奇数のとき、任意の実数 c に対して $x^n = c$ を満たす実数 x がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。
- n が偶数のとき、任意の $c \geq 0$ に対して、 $x^n = c$ を満たす実数 $x \geq 0$ がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。

$c < 0$ のときは? $n = 2$ のとき $\sqrt[n]{c} = \sqrt{c} = \sqrt{-c}i$ とするのが、高校数学のルールであったが、この講義では $\sqrt[n]{c}$ の一般的定義はしないことにする ($n = 2$ のときの真似 (?) をして、 $\sqrt[n]{|c|}e^{i\pi/n}$ と定義する手はあるが…)。

c が虚数のとき、 $\sqrt[n]{c}$ が、 c の n 個の n 乗根のうちどれを表すか決めるための、一般的に使える良いルールがない。だからこの講義では無理にルールは決めないことにする。後で $w = \sqrt[n]{z}$ という関数の話をするので、そのときもう一度取り上げる。 $\sqrt[n]{c}$ を使うときは、その都度適当なルールを選ぶこと。

2 次方程式の解の公式を使う場合、 $(\pm\sqrt{D})$ の形なので) どのルールでも問題ない。

(話が細かいので、スルー可。Cardano の公式に興味がある人、前のスライドで $\sqrt[n]{c}$ の定義についてうるさいことを言っているけれど必要があるの?、という人は読んで下さい。)

具体的な問題として、3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ に対する Cardano の公式

$$(1.35) \quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}, \quad \Delta := -(27q^2 + 4p^3)$$

を取り上げる。3 乗根の値は普通 (0 でない限り) 3 通りあるが、この公式には 3 乗根を表す $\sqrt[3]{}$ が 2 組あるので、 $3 \times 3 = 9$ 通りの値が考えられるが、3 次方程式の解は多くても 3 つなので、うまく値を選ぶ必要があることが分かる。

簡単のため、まず $p, q \in \mathbb{R}$ の場合を考える。

$\Delta \leq 0$ の場合は、 $\sqrt{\text{非負実数}}$ と $\sqrt[3]{\text{実数}}$ しか出て来ない。前のスライドに書いたルール (高校生の知っている $\sqrt{}$ と $\sqrt[3]{}$) で解釈して問題がない (ことが分かる)。

$\Delta > 0$ の場合は、 $\sqrt{\text{負の実数}}$ と $\sqrt[3]{\text{虚数}}$ が現れて、その値をどう選択するか問題となる。(1.35) に 2 つある $\sqrt[3]{}$ の値は、 $\sqrt[3]{} \sqrt[3]{} = -\frac{p}{3}$ を満たすように選ばないと、 x は 3 次方程式の解にならない。それを考えると、(1.35) はむしろ

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \frac{-p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}}$$

と書く方がいいのかもしれない (もちろん $\sqrt[3]{} = \sqrt[3]{}$ とする)。

p, q が虚数の場合も、 $\sqrt[3]{}$ の値の選択をきちんとすれば、(1.35) の x は解となる。

1.11.5 余談 1: 定木とコンパスによる正 n 角形の作図 (円周の等分)

以上の話は、[定木とコンパスによる正 \$n\$ 角形の作図](#) と関係がある。

Gauss (1777–1855) は、定木とコンパスで正 n 角形が作図できるためには、 n が

$$n = 2^k \times \text{相異なるフェルマー素数 } F_m \text{ の積}$$

の形をしていることが必要十分であることを証明し (1801 年発表)、 $n = 17 = F_2$ のときの作図法を示した (発見は 1796 年)。

つまり正 17 角形は作図可能である¹⁾。これは有名な話で多くの本に載っているが、参考文献として、高木 [2], 栗原 [3] をあげておく。

フェルマー素数 とは、**フェルマー数** $F_m := 2^{2^m} + 1$ のうち、素数であるもののことである。 $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$ はフェルマー素数であるが、 F_5 は素数でない ($F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ と素因数分解出来ることを Euler (1707–1783) が発見した。実は F_m ($m \geq 5$) が素数であるような m は知られていないらしい。)。

定木とコンパスで作図可能となる n は、小さい順に $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, \dots$ □

定規とコンパスで任意の角の二等分ができるので 2^k がつくが、任意の角の三等分は出来ない (2 つ以上の 3 があつたら出来ない)。

1) $\cos \frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} \right) = 0.932472229404355 \dots$

1.11.6 余談 2: $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$ を求めて

高校で、 30° , 45° , 60° の $\sin$, $\cos$ の値を学んだ。正五角形の作図も良く出て来る問題で、 36° , 72° の $\sin$, $\cos$ の値も求めたことがあるかもしれない (大学入試のネタになるし、 ± 1 の 5 乗根にも現れる)。これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表せる。

半角の公式を使うと、 18° , 15° の $\sin$, $\cos$ も $\sqrt{\quad}$ で表せる。加法定理を使うと、 $18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$ の $\sin$, $\cos$ も $\sqrt{\quad}$ で表せることが分かる。

それでは 1° の $\sin$, $\cos$ はどうだろう？もしこれが $\sqrt{\quad}$ で表されれば、任意の自然数 n に対して n° の $\sin$, $\cos$ が $\sqrt{\quad}$ で表される。

この問題は、「[角の三等分](#)」とも関係があり、(結論を天下一りに述べると) 1° の $\sin$, $\cos$ を $\sqrt{\quad}$ で表すことは出来ないことが知られている。

アル・カーシー (ジャムシード・ギヤースッディーン・アル・カーシー, 1380–1429, ペルシャの数学者・[天文学者](#)) は、3 次方程式 $\sin 3^\circ = 3x - 4x^3$ を数値的に解くことによって ($\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$ に注意)、 $\sin 1^\circ$ を求めた (カッツ [4])。

1.11.7 遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く

Mathematica で 3 乗根を求めてみよう。 $z^3 = i$ を解くには

```
ComplexExpand[Solve[z^3==I,z]]
```

あるいは $((x + yi)^3 = i$ を解くことにして)

```
Solve[{x^3-3x y^2==0,3x^2 y-y^3==1},{x,y},Reals]
```

この解は実数の $\sqrt[3]{\quad}$ で表せる ($z = -i, \frac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$)。

ところが $z^3 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ はうまく行かない。(この辺は角の三等分とも関係する。 30° の三等分は、実数の $\sqrt[3]{\quad}$, $\sqrt{\quad}$ では表せない。三角関数を使って答えを表す。)

一方、これを書いているときに気づいたのだけど、今の Mathematica は、 $z^{17} = 1$ を $\sqrt{\quad}$ で解けるようになっている (Mathematica 12 で確認)。

```
ComplexExpand[Solve[z^17==1,z]]
```

```
ToRadicals[%]
```

(そのうち Mathematica が $z^{257} = 1$ を解けるようになるだろうか?)

前のスライドの最後の結果はごちゃごちゃしているけれど、本当に 17 等分点だろうか?

```
g0 = ContourPlot[x^2 + y^2 == 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
plotpoints[1_] := Show[g0, ListPlot[1, PlotStyle -> Directive[Red, PointSize[Large]]]]
points17 = {Re[z], Im[z]} /. ToRadicals[ComplexExpand[Solve[z^17==1,z]]]
regular17gon = plotpoints[points17]
```

1.12 $\mathbb{C}$ の距離、複素数列の収束

一言でまとめると: $\mathbb{R}^2$ と同じ。

複素数列の収束は $\mathbb{R}^2$ の点列の収束と同じで、実部・虚部の作る数列の収束と同じ。 $\mathbb{R}^2$

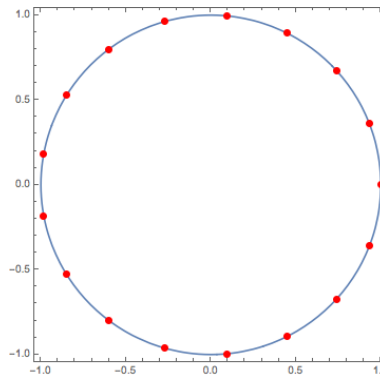


図1 $z^{17} = 1$ の解を図示

については「知っている」ことになっているので、 $\mathbb{C}$ についても「同様に分かる」ことにする。

任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) となる x, y を取って、 $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと、 $z \in \mathbb{R}^2$ であり

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

これから、 $\mathbb{C}$ における 2 点の距離と、 $\mathbb{R}^2$ における対応する 2 点の距離は等しい:

$$|z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|.$$

$\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ は距離まで込めて対応している。

複素数列 $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{C}$ に対して、

$$x_n := \operatorname{Re} z_n, \quad y_n := \operatorname{Im} z_n, \quad \mathbf{z}_n := \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad a := \operatorname{Re} c, \quad b := \operatorname{Im} c, \quad \mathbf{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とおくと、 $\{\mathbf{z}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^2$ の点列, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ であり、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c &\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - c| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{z}_n - \mathbf{c}| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{z}_n = \mathbf{c} \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b. \end{aligned}$$

2 複素関数とその極限、連続性、正則性

2.1 複素関数の実部・虚部

2.1.1 定義

いよいよ複素関数を調べ始めよう。

定義 2.1 (複素関数の実部・虚部). $\Omega \subset \mathbb{C}$ とする。関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 f の**実部** u , **虚部** v を

$$(2.1) \quad u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + yi), \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + yi) \quad ((x, y) \in \tilde{\Omega}).$$

で定める。ただし

$$(2.2) \quad \tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + yi \in \Omega\}.$$

$u: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, v: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ である。(メモ: 面倒がらずに $\tilde{\Omega}$ は図を描いて説明すること。)

こうして実部・虚部に分解してしまえば、極限と連続性については、実 2 変数の関数のそれと同じである (数学解析を復習すると良い。桂田 [5] を見よ。)

2.1.2 例

例 2.2. (1) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = z^2$ とするとき ($\Omega = \mathbb{C}, \tilde{\Omega} = \mathbb{R}^2$)

$$f(x + yi) = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

ゆえに

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

(2) $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{z}$ とするとき ($\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tilde{\Omega} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$)

$$f(x + yi) = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}.$$

ゆえに

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

例 2.3 (つづき). 3. $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = e^z$ とするとき

$$f(x + yi) = e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

ゆえに

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

次回、任意の正則関数 f の実部・虚部 u, v について、Cauchy-Riemann 方程式と呼ばれる微分方程式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

が成り立つことを証明する。上にあげた例で、この方程式が成り立つことは容易に確認できる。 □

3 参考文献

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/complex2026.pdf> (2014～).
- [2] 高木貞治：近世数学史談及雑談, 共立出版 (1946), 1996 年に「近世数学史談・数学雑談 復刻版」として復刻されている。また 1995 年に岩波文庫に「近世数学史談」が入った。
- [3] 栗原将人：ガウスの数論世界をゆく：正多角形の作図から相互法則・数論幾何へ, 数学書房 (2017/5/15).
- [4] ヴィクター J. カッツ：カッツ 数学の歴史, 共立出版 (2005), 上野 健璽・三浦伸夫 監訳, 中根美千代・高橋秀裕・林知宏・大谷卓史・佐藤賢一・東慎一郎・中澤聡 翻訳. 原著は、Victor J. Katz, A History of Mathematics, A: An Introduction, Second Edition, Addison Wesley Longman (1998).
- [5] 桂田祐史：数学解析, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/kaiseki-2021/kaiseki-2021.pdf> (2014 年～).