

複素関数・同演習 第 3 回

～共役複素数、絶対値、複素指数関数のフライング
導入, n 乗根～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/>

2026 年 9 月 30 日, 2026 年 10 月 6 日

目次

1	はじめに	1
1.1	本日の講義内容	2
1.2	宿題 1 について	2
1	複素数の定義と基本的な性質 (続き)	2
1.5	平方根 (続き)	2
1.5.5	2 次方程式	2
1.6	共役複素数	4
1.6.1	実係数多項式の根	4
1.7	絶対値	5
1.8	複素指数関数のフライング導入	6
1.9	極形式	8
1.9.1	定義	8
1.9.2	偏角	9
1.9.3	極形式と偏角の例	9
A	問の解答	11
	参考文献	11

1 はじめに

1.1 本日の講義内容

- 講義ノート [1] の 1.5–1.9 (行けるところまで)

1.2 宿題 1 について

宿題 1 を出します。締め切り (2026 年 10 月 6 日 (火) 13:30)、提出先は Oh-o! Meiji の「複素関数演習」です。

注意事項

- 普通の数式として無理なく読み取れる, A4 サイズの PDF ファイルが 1 つ, の 2 点が条件です。L^AT_EX や Word 等で作成した PDF, 紙に手書きしたものをスキャンした PDF、タブレットで書いたもの、なんでも受け付けます。(スマホで撮った画像ファイルも一応受け付けますが、出来る限りスキャン・アプリで作成した PDF にして下さい)。

Word 等で数式の入力方法がよく分からない場合は、無理をせず「手書きしてスキャン」を選んで下さい。

- ファイル 1 つだけで提出して下さい。

複数ページになった場合に、1 ページずつの複数ファイルを送って来る人がいますが、こちら側の処理が意外と面倒です。複数の PDF を 1 つにまとめることは Mac のプレビューで簡単に出来るので、そうしてから提出して下さい。

- レポートの 1 ページ目の上部に学年・組・番号・氏名を記して下さい。

1 複素数の定義と基本的な性質 (続き)

1.5 平方根 (続き)

1.5.5 2 次方程式

(少し省略)

系 1.6 (複素係数 2 次方程式). $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$ とする。2 次方程式 $az^2 + bz + c = 0$ の解は

$$(1.3) \quad z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ここで $\sqrt{b^2 - 4ac}$ は $b^2 - 4ac$ の平方根の任意の 1 つを表すとする (2 つある場合、どちらを選んでも、 z は同じものを表すことになる)。

$D := b^2 - 4ac$ とするとき、 $D \neq 0$ なら 2 つ、 $D = 0$ ならば 1 つ (重根)。

2026/9/30 の講義はここからです。

証明 $\left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ に注意する。平方完成を行うと

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left[\left(z + \frac{b}{a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\ &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right] \\ &= a \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right). \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-2b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

□

□

注意 1.7. この証明は高校生のとき習って以来のお気に入りです。複素数にそのまま通用する。「 $az^2 + bz + cz = 0$ の解が α, β ならば、 $az^2 + bx + c = a(z - \alpha)(z - \beta)$ 。」の証明にもなっている。

一方、

$$\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

の平方根を取る、という証明法もある (というかこちらの方が自然そう…でも以下に示すように若干の注意が必要)。

$$\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ のいずれか}$$

であり、 a, b, c が実数の場合はいずれであるか簡単に分かるが (a の符号で場合わけする)、複素数の場合は分かりにくい。

$$\pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ の両方}$$

であることに気づくと

$$z + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ の両方}$$

と証明できる。

□

1.6 共役複素数

$$(1.4) \quad z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

の**共役複素数** (the complex conjugate of z) $\bar{z}$ を次式で定める。

$$(1.5) \quad \bar{z} := x - yi$$

一般に以下が成立する

$$(1.6) \quad \overline{\bar{z}} = z.$$

$$(1.7) \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \bar{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

(3つ目は $z = x + yi$, $w = u + iv$ と置いて証明。4つ目は3つ目を利用する。)

$$(1.8) \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \text{ すなわち } \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

ゆえに「 x, y で表せるものは、 $z, \bar{z}$ で表せる」。

$$(1.9) \quad z = \bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}.$$

1.6.1 実係数多項式の根

高校数学で次のような問題はおなじみ。

- $1 + 2i$ が $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) の解ならば、 $1 - 2i$ も解である。
- $1 + 2i$ が $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) の解ならば、 $1 - 2i$ も解である。

この事実の一般化ができる。

定理 1.8 (実係数多項式の根の共役複素数も根). $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ に対して $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ と置く。 $c \in \mathbb{C}$ が $f(c) = 0$ を満たすならば、 $f(\bar{c}) = 0$.

証明

$$\begin{aligned}\overline{f(z)} &= \overline{a_0 z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \\ &= \overline{a_0 z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_{n-1} z} + \overline{a_n} \\ &= \overline{a_0} \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}} \overline{z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_{n-1}} \overline{z} + \overline{a_n} \\ &= \overline{a_0} (\overline{z})^n + \overline{a_{n-1}} (\overline{z})^{n-1} + \cdots + \overline{a_{n-1}} \overline{z} + \overline{a_n} \\ &= a_0 (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \overline{z} + a_n \\ &= f(\overline{z})\end{aligned}$$

が成り立つので

$$f(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{f(c)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\overline{c}) = 0.$$

□

もっと詳しく、「 c が $f(z) = 0$ の m 重根ならば $\overline{c}$ は $f(z) = 0$ の m 重根である」も成り立つ。これには

$$c \text{ が } f(z) = 0 \text{ の } m \text{ 重根} \Leftrightarrow f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(m-1)}(c) = 0 \wedge f^{(m)}(c) \neq 0$$

と「実係数多項式の導関数は実係数多項式である」に注意すれば良い。

1.7 絶対値

$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) の絶対値 (absolute value, modulus, magnitude) $|z|$ を次式で定義する。

$$(1.10) \quad |z| = |x + yi| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

これは、対応する $\mathbb{R}^2$ の要素 (数ベクトル) (x, y) の普通の大きさ (長さ, ノルム) と同じである。複素平面で、点 z と原点との距離を意味する。

$$(1.11) \quad |-z| = |z|, \quad |\overline{z}| = |z| \quad (\text{図を描いてみる}),$$

さらに

$$(1.12) \quad z\overline{z} = |z|^2$$

が成り立つ。実際

$$z\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2.$$

ゆえに $z \neq 0$ ならば

$$(1.13) \quad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

定理 1.9 (絶対値の性質). (1) $|z| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow z = 0$.

(2) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (三角不等式)

(3) $|zw| = |z| |w|$. (系として、 $w \neq 0$ のとき $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$)

(4) $|z - w| \geq ||z| - |w||$.

証明 (1) $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「 $\|x\| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow x = 0$ 」と同じ。

(2) $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 」と同じ。

(3) $z = a + bi$, $w = c + di$ において、左辺 & 右辺を計算して比較するか、
 $|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\overline{z}\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2$ の $\sqrt{\quad}$ を取る。

(4) $|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w|$ であるから $|z| - |w| \leq |z - w|$.

z と w を入れ替えて $|w| - |z| \leq |w - z| = |z - w|$.

まとめると $||z| - |w|| = \max\{|z| - |w|, |w| - |z|\} \leq |z - w|$.

(任意の実数 x について、 $|x| = \max\{x, -x\}$ であることを用いた。)

□

1.8 複素指数関数のフライング導入

この講義では多くの初等関数を冪級数を用いて定義する。指数関数について、そうすると

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (\text{冪級数による定義})$$

となる。しかし、指数関数は便利なので、冪級数の説明に先走って導入する。後で冪級数で定義しても同じであることを確認する。

定義 1.10 (複素指数関数). $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対して、

$$(1.14) \quad e^z = \exp z := e^x (\cos y + i \sin y).$$

赤字は実関数としての指数関数。本来は別の記号にすべきかもしれないが拡張なので同じ記号にする。

(細かい注) e^z と書くと「 e の z 乗」と読みたくなり、実際にそう呼んだりするが、複素数の場合に一般の (指数が整数でないという意味) の冪乗はまだ定義していないので、本当はおかしい。(冪乗の定義はずっと後になる。そのとき詳しく解説するが、冪乗は多価になり、一方 e^z は一価であるので、(ほとんどの場合に) 一致することはない。)

e^z は、実指数関数の拡張である。すなわち

$$(1.15) \quad z \in \mathbb{R} \Rightarrow e^z = e^z.$$

実際、 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) について、 $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0$. このとき、 $e^z = e^x (\cos 0 + i \sin 0) = e^x = e^z$.

指数法則が成り立つ:

$$(1.16) \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

実際、(実数の世界の) 指数関数の指数法則と三角関数の加法定理により

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \\ &= e^{x_1+x_2} (\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)) \\ &= e^{x_1}e^{x_2} (\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i (\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)), \\ e^{z_1}e^{z_2} &= (e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1)) (e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2)) \\ &= e^{x_1}e^{x_2} (\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i (\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)) \end{aligned}$$

であるから $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. □

$$(1.17) \quad (\forall z \in \mathbb{C}) \quad e^z \neq 0, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}. \quad (\forall \text{ は強調しているつもり。})$$

実際 $e^ze^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1 \neq 0$ なので、 $e^z \neq 0$. 割り算して $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

$e^z \neq 0$ (指数関数は 0 にならない) は意外と重要である。

z が純虚数のときを考える。 $z = i\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$) のとき ($x = 0, y = \theta$ であるから…)

$$(1.18) \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{Euler の公式}).$$

この式に慣れるべき! (加法定理よりは指数法則の方が楽だし)

図形的に把握することを勧める (次のスライド)。

注意 1.11 (教育的指導). $e^{i\theta}$ を見ると、ほとんど反射的に (1.18) を使って、 $\cos, \sin$ で表現して計算する人が毎年かなりの数いるが、複素指数関数で表現できているものは、多くの場合は、複素指数関数のままで計算する方が便利である。いつも $\cos, \sin$ に直しては、複素指数関数に慣れる機会が失われてしまうので、**できる限り複素指数関数のままで計算するよう心がける**ことを勧める。

このスライドの式は、(1.18) を用いて確かめ、かつ図形的に理解 (把握) しよう。

$$(1.19) \quad e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1.$$

$$(1.20) \quad \cos \theta = \operatorname{Re} e^{i\theta}, \quad \sin \theta = \operatorname{Im} e^{i\theta}.$$

(1.18) で θ の代わりに $-\theta$ を代入すると

$$(1.21) \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta.$$

$e^{i\theta}$ と $e^{-i\theta}$ は単位円上にあり、実軸に関して対称の位置にある:

$$(1.22) \quad |e^{i\theta}| = 1, \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}.$$

(1.18) $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ と (1.21) $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ を、 $\cos \theta, \sin \theta$ についての連立方程式として解くと

$$(1.23) \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

しょっちゅう出て来るので、そのうち慣れるはず。最後には覚える、と覚悟する。

絶対値については、 $|e^z| = |e^x e^{iy}| = |e^x| |e^{iy}| = e^x \cdot 1 = e^x$ であるから

$$(1.24) \quad |e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}.$$

2026 年 9 月 30 日の講義はこの辺りまでです。

$$(1.25) \quad (e^z)^n = e^{nz} \quad (n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}).$$

実際、 $n = 0$ の場合は、両辺とも 1 であるから、成立する。 $n \in \mathbb{N}$ の場合は

$$e^{z_1+z_2+\cdots+z_n} = e^{z_1} e^{z_2} \cdots e^{z_n}$$

であるから、 $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ のとき $e^{nz} = (e^z)^n$. $n < 0$ のときは、 $n = -m$ とすると、 $e^{nz} = e^{-mz} = \frac{1}{e^{mz}} = \frac{1}{(e^z)^m} = (e^z)^{-m} = (e^z)^n$. □

特に $\theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ に対して $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. すなわち

$$(1.26) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (\text{ド・モアブルの公式}).$$

(結局は三角関数の加法定理と帰納法で、高校の時と本質的に同じ証明である。)

注意 1.12 (一般の冪). 一般の冪 a^b はまだ定義していない (しばらく待って下さい)。実は $(a^b)^c = a^{bc}$ の形の指数法則は一般には成り立たない。(1.25) は、その形の指数法則とはみなさない方がよい。

1.9 極形式

1.9.1 定義

複素数を極座標で表した式のことを**極形式** (polar form) とよぶ。

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ とするとき、

$$(\exists r \geq 0)(\exists \theta \in \mathbb{R}) \quad (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

この r, θ を (x, y) の**極座標**という。

- r は一意的に定まる: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- θ は、 $r > 0$ のとき (いいかえると $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき) 2π の整数倍の不定差を除いて定まる。 $r = 0$ のとき、 θ は何でもよい。

$0 \leq \theta < 2\pi$ や $-\pi < \theta \leq \pi$ のように条件をつけると (任意に選んだ α に対して、 $\alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi$ あるいは $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$ という条件を課すと)、一意的に定まる。

—— 以上は高校生も知っている (はずの) こと。

$z \in \mathbb{C}$ とすると、

$$(1.27) \quad (\exists r \geq 0)(\exists \theta \in \mathbb{R}) \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}.$$

この式 ($z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ あるいは $z = re^{i\theta}$) を z の**極形式**という。なるべく後者を使うこと (慣れて欲しいから、その方が誤解を招きにくいから)。

1.9.2 偏角

$z \in \mathbb{C}$ に対して、 $r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$ が $z = re^{i\theta}$ を満たしているとする。

$r = |z|$ である。

$z \neq 0$ のとき、 θ は 2π の不定差を除いて定まる。 θ を z の**偏角** (an argument of z) とよび、**arg** z と表す。

1つの実数として定まらないので、やや曖昧なところがある。

範囲を $-\pi < \theta \leq \pi$ と限定したとき、ただ1つに定まる。それを **Arg** z と書き、 z の**偏角の主値** (the principal argument of z) とよぶ。

$r_1, r_2 > 0, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$(1.28) \quad r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = r_2 \wedge (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi.$$

後者 (青い部分) は $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$ と表せる。

(1.28) の証明 $\Leftarrow$ は当たり前。 $\Rightarrow$ はまず絶対値を取って $r_1 = r_2$. それを代入して割り算して $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$. これから $(\exists k \in \mathbb{Z}) \theta_1 - \theta_2 = k \cdot 2\pi$. $\square$

1.9.3 極形式と偏角の例

例 1.13. 以下の z_j の極形式と **Arg** z_j を求めてみよう。

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_4 = 1 - \sqrt{3}i.$$

どの j についても、 $|z_j| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

$$z_1 = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}, \quad \text{Arg } z_1 = \frac{\pi}{3},$$

以下同様に

$$\begin{aligned} z_2 &= 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}, \quad \text{Arg } z_2 = \frac{2\pi}{3}, \\ z_3 &= 2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2e^{\frac{4\pi}{3}i} = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}, \quad \text{Arg } z_3 = -\frac{2\pi}{3}, \\ z_4 &= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}, \quad \text{Arg } z_4 = -\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

例 1.14. 以下の z_j の極形式と $\text{Arg } z_j$ を求めてみよう。

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 + i, \quad z_3 = -1 - ii, \quad z_4 = 1 - i.$$

(まずは絶対値の計算から始める。) どの j についても、 $|z_j| = \sqrt{(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad \text{Arg } z_1 = \frac{\pi}{4} \\ (\cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ となる } \theta \text{ を探した。}) \end{aligned}$$

以下同様に

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}, \quad \text{Arg } z_2 = \frac{3\pi}{4}, \\ z_3 &= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i} = \sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}, \quad \text{Arg } z_3 = -\frac{3\pi}{4}, \\ z_4 &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i} = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}, \quad \text{Arg } z_4 = -\frac{\pi}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

注意 1.15 (期末試験間違いコレクションから). $-1 + \sqrt{3}i$ の極形式は? 答えは一つではない。次は間違いである。

$$-1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

なぜ? 正しい等式であるが、 $\frac{2}{3}\pi$ と $\frac{\pi}{3}$ が一致していないのがマズい。書くところが 2 つあると、別のものを書いてしまうことがある…

$z = re^{i\theta}$ とするとき、 $\bar{z}$ の極形式は? $\bar{z} = re^{-i\theta}$. これは OK.

しかし

$$\bar{z} = r (\cos \theta - i \sin \theta)$$

は正しい等式だが極形式ではない。マイナス $-$ はマズい。

ということもあって、極形式の三角関数バージョンは避けよう、と言ってます。

例題 $r, \theta \in \mathbb{R}$, $z = re^{i\theta}$ とするとき、 z の極形式を求めよ。

(ひっかけ問題のように思えるかもしれないけれど…意外と大事なこと。)

解答 $r \geq 0$ の場合は、 $z = re^{i\theta}$ は z の極形式である。

$r < 0$ の場合は、 $r = (-r) \cdot (-1) = (-r)e^{i\pi}$ であるから

$$z = re^{i\theta} = (-r)e^{i\pi} \cdot e^{i\theta} = (-r)e^{i(\theta+\pi)}$$

であり、 $-r > 0$, $\theta + \pi \in \mathbb{R}$ であるから、 $z = (-r)e^{i(\theta+\pi)}$ が z の極形式である。 □

A 問の解答

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/complex2026.pdf> (2014~).