

～複素数の定義、複素平面、平方根、共役複素数、絶対値～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/>

2026 年 9 月 29 日, 2026 年 10 月 5 日

目次

0	本日の内容・連絡事項	1
1	複素数の定義とその性質	2
1.1	高校で習ったこと + α	2
1.2	複素数の定義	4
1.2.1	3つの方法の紹介	4
1.2.2	復習 可換体の公理	6
1.3	順序その他 (他の体 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \dots$ との比較)	6
1.3.1	余談 Hamilton の四元数	7
1.4	複素 (数) 平面, Gauss 平面	7
1.5	平方根	7
1.5.1	定義	7
1.5.2	平方根の求め方をマスター	8
1.5.3	実数の平方根と $\sqrt{\quad}$	9
1.5.4	関数論における $\sqrt{\quad}$	9
1.5.5	2 次方程式	10
1.6	共役複素数	11
1.6.1	定義と基本的性質	11
1.6.2	実係数多項式の根	11
1.7	絶対値	12
A	問の解答	13
	参考文献	14

0 本日の内容・連絡事項

- 大まかに講義ノート [1] §1.7 までの内容。
- 来週まで、複素数の基本的な演算の話が続く。数学 III で学んだ内容も多い。退屈にならないように動機付け。

Cardano による 3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ の解の公式を見ると、複素数を考える必要性は分かりやすい。

– p, q が実数で $\Delta > 0$ のときは？ → [虚数の 3 乗根](#)が必要になる (後日解説)。

– p, q が虚数のときは？ → [虚数の平方根](#)が必要になる (今回解説)。

- 明日宿題 1 を出す。×切 10 月 6 日 13:30 (その心は来週の講義で解答を解説するかもしれないので、その前まで提出しなさい)。

1 複素数の定義とその性質

1.1 高校で習ったこと + α

複素数は高校数学で一応は教わったが、教科書にきちんとした定義が書いてあるとは言いにくい。でも、まずはそれをおさらいしてみよう。

$i^2 = -1$ となる数 ([虚数単位](#), the imaginary unit) i を導入し、 $a + bi$ (a と b は実数) と書ける数を[複素数](#) (a complex number) という。複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す。

手短かに言うと、 i^2 が出て来たら -1 で置き換える以外は、 i を変数とする文字式と同じように (つまり実数と同じ計算ルールで) 計算する。

具体的には

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

で和と積を定める (定められる?)。

実数でない複素数のことを[虚数](#) (an imaginary number) と呼ぶ。つまり虚数とは、 $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$) と書ける数のことをいう。

[複素数と虚数を混同する人がとても多い。注意しましょう。](#)

2026/9/29 の講義はここからです。

$b = 0$ のとき、つまり $a + i0$ を単に a と表す。実数と見分けがつかない。「同一視」していることになる (つまり「**実数は複素数**」)。2 つの実数を実数として足したりかけたりしたものは、複素数として足したりかけたりものと、結果は同じになるので、矛盾は生じない。

$a = 0$ のとき、つまり $0 + bi$ を単に bi と表す。この bi を**純虚数** (a purely imaginary number) と呼ぶ。この定義によると、 $0 = 0 + 0i$ も純虚数であり、「**0 は虚数ではないが純虚数である**」ということになる。(個人的には気持ちが悪いので、この言葉はこの授業では使わないことにしている。本を読むとたまに出て来るので (何かの条件が「純虚数である」となることがあるので)、一応知っていた方が良い。なお、高校の教科書には「 $a = 0$, $b \neq 0$ のとき bi の形の複素数を純虚数という。」と書いてあったりする。あまり良いこととは思わない。)

以上が高校数学での複素数であるが、かなりいい加減で、定義とは言いにくい (書いていても気持ちが悪い)。

きちんとした定義は、次項 (§1.2) で与えることにする。

虚数単位の記号 虚数単位は純粋数学の文献では i と書かれるが、電流を i と書きたい分野では j と書かれたりする。JIS (日本工業規格) では、字体を立体にして i あるいは j と書くことになっている (そうである)。

プログラミング言語では

- Mathematica では、虚数単位を I で表す。
- MATLAB では i , j のどちらも虚数単位を表し、 i や j を変数名として用いて異なる値を割り当てた場合も $1i$ や $1j$ は虚数単位を表す。
- Python では、 j で虚数単位を表し、 j を変数名として用いて異なる値を割り当てた場合も $1j$ は虚数単位を表す。

複素変数を表す文字 **複素数の変数は、 z, w, ζ などの文字で表されることが多い** (ζ はギリシャ文字で (大文字は Z)、ゼータ、またはツェータと読む)。

実部・虚部 $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対して、 x, y をそれぞれ z の**実部** (the real part of z)、**虚部** (the imaginary part of z) と呼び、 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ で表す:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

(この記号は高校では出て来ていないかもしれない。)

(w の実部・虚部には u, v が、 ζ の実部・虚部には ξ, η が使われることが多い:
 $w = u + iv$, $\zeta = \xi + i\eta$)

例 1.1 $z = 1 - 2i$ のとき、 $\operatorname{Re} z = 1$, $\operatorname{Im} z = -2$. 次のようにも書ける。

$$\operatorname{Re}(1 - 2i) = 1, \quad \operatorname{Im}(1 - 2i) = -2.$$

(注意 $\operatorname{Im}(1 - 2i) = -2i$ ではない。)

加法・乗法の単位元&逆元 加法の単位元は $0 = 0 + 0i$, 乗法の単位元は $1 = 1 + 0i$ である。

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad z + 0 = 0 + z = z, \quad (\forall z \in \mathbb{C}) \quad z \cdot 1 = 1 \cdot z = z.$$

複素数は、0 でない任意の数で割算が出来る。

$z = x + iy \neq 0$ ($x, y \in \mathbb{R}$) の、乗法に関する逆元 w を求めよう。

w が z の乗法に関する逆元とは

$$zw = 1$$

を満たすことをいう。 $z = 0$ の逆元は存在しない。 $z \neq 0$ の逆元を求めよう。

$w = u + iv$ ($u, v \in \mathbb{R}$) とおくと、 $(x + iy)(u + iv) = 1$ は

$$(1.1) \quad \begin{cases} xu - yv = 1 \\ xv + yu = 0 \end{cases}$$

という連立1次方程式と同値である。この方程式は、 $z \neq 0$ のときは一意的な解

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

を持つ。ゆえに $z \neq 0$ の逆元 w は一意的に存在して

$$(1.2) \quad w = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

問 1. このことを確かめよ。 [解答へ](#)

乗法の逆元の確認 (蛇足?) 問 2. 高校生のとき

$$\frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{x - yi}{x^2 - x \cdot yi + yi \cdot x - y^2 i^2} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$$

のような計算をしたことがあるだろう。これを $x + yi$ の逆元が $\frac{x - yi}{x^2 + y^2}$ であることの証明として採用できるだろうか? [解答へ](#)

1.2 複素数の定義

1.2.1 3つの方法の紹介

高校数学での定義はいい加減である。ちゃんと定義する方法は色々ある。

(1) **Hamilton の方法** $\mathbb{R}^2$ に加法・乗法を

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

で定めると、 $(\mathbb{R}^2; +, \cdot)$ は可換体であり (これを証明するには、次項で紹介する可換体の公理を満たすことをチェックすれば良い)、

- 加法についての単位元は $(0, 0)$. (x, y) の逆元は $(-x, -y)$ (これを $-(x, y)$ と書くことにする。)
- 乗法についての単位元は $(1, 0)$. (x, y) の逆元は

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

が成り立つ。

この演算を備えた $\mathbb{R}^2$ のことを $\mathbb{C}$ と表す。

普通の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の拡張ととらえると分かりやすいかも。

$(0, 1)^2 = -(1, 0)$ が成り立つ。 $(1, 0)$, $(0, 1)$ をそれぞれ 1 , i と書くことにすると、 $i^2 = -1$ であり

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a1 + bi.$$

(このあたりはまだ詰めが甘いかな。 $(a, 0)$ という形の複素数が実数 a と “同一視できる” ということを示し、以下では「同一視する」と言い切って $(a, b) = a + bi$ とする。そのうちちゃんと書こう。)

(2) 行列を用いる方法 2次正方行列全体 $M_2(\mathbb{R})$ の部分集合 $\mathbb{C}$ を

$$\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

で定めると、行列の通常の和と積を演算として、 $\mathbb{C}$ は可換体になる。

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = aI + bJ, \quad J^2 = -I.$$

I, J は、それぞれ $1, i$ に対応する。(ちなみに、後で出て来る $e^{i\theta}$ に対応する行列は、 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (よく知られた回転の行列) になる。)

(3) (もしも可換環とそのイデアルについて知識 (代数学の常識) があれば)

実係数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ を、そのイデアル $(x^2 + 1)$ で割った剰余環を $\mathbb{C}$ とする:

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1).$$

$(x^2 + 1)$ は $\mathbb{R}[x]$ の極大イデアルなので、その剰余環 $\mathbb{C}$ は可換体となる。

代数学知らないと難しい?…… 一方これは高校数学流の厳密化とも言える。

もう少し噛み砕いた説明が読みたければ、飯高 [2] を見よ (ネットでアクセス可能)。

1.2.2 復習 可換体の公理

K が**可換体**とは、加法について可換群、加法の単位元 0_K を除いて乗法について可換群、そして分配法則を満たすこと。

- (1) $(\forall a, b, c \in K) \quad (a + b) + c = a + (b + c)$
- (2) $(\exists 0_K \in K) (\forall a \in K) \quad a + 0_K = 0_K + a = a$
- (3) $(\forall a \in K) (\exists a' \in K) \quad a + a' = a' + a = 0_K$
- (4) $(\forall a, b \in K) \quad a + b = b + a$
- (5) $(\forall a, b, c \in K) \quad (ab)c = a(bc)$
- (6) $(\exists 1_K \in K) (\forall a \in K) \quad a1_K = 1_K a = a$
- (7) $(\forall a \in K \setminus \{0_K\}) (\exists a'' \in K) \quad aa'' = a''a = 1_K$
- (8) $(\forall a, b, c \in K) \quad (a + b)c = ac + bc, \quad a(b + c) = ab + ac$
- (9) $(\forall a, b \in K) \quad ab = ba$
- (10) $0_K \neq 1_K$

(2) を満たす 0_K はただ一つしかないので分かる。(3) に現れる 0_K はそれを指す。
 1_K についても同様である。

$K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はこの公理を満たす。

$K = \mathbb{H}$ (後で紹介する四元数体) は (1)–(8) と (10) を満たすが、(9) は満たさない。

1.3 順序その他 (他の体 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \dots$ との比較)

$\mathbb{C}$ は**順序体**ではない。

その代わり (?) 大きなアドバンテージがある: **代数的閉体** (1 以上の任意の次数の代数方程式がその中に根を持つ $\therefore$ **代数学の基本定理**が成立)。

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ について。

- $\mathbb{Q}$ は可換体かつ順序体だが完備ではない (収束しない Cauchy 列が存在する)。
- $\mathbb{R}$ は可換体かつ順序体かつ完備であるが、代数的閉体ではない (2 次方程式の解すら存在しないこともある)。

注: 完備性は解析学にとっては非常に有効

- $\mathbb{C}$ は可換体かつ完備かつ代数的閉体であるが、順序体ではない。

(参考) Hamilton の四元数体 $\mathbb{H}$ は、体ではあるが可換性は成り立たない。順序体でもない。

1.3.1 余談 Hamilton の四元数

(この内容は「時間があれば話そう」というもの。省略するかもしれない。)

Hamilton (William Rowan Hamilton, 1805–1865) は三元数を探して成功しなかったが、
しげんすう
四元数 (quaternion) を発見した。

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

(これから $ij = k, jk = i, ki = j$ が導かれる。)

$\mathbb{H}$ は実は非可換体である。**四元数体** (the skew field of Hamilton quaternions) と呼ばれる。

多項式の割り算がこれまでのようには出来ず、因数定理も成り立たない。 $z^2 = -1$ の解が $\pm i$ 以外にも存在する (実は無限個存在する)。

四元数については、例えば堀 [3], 今野 [4] を見よ。

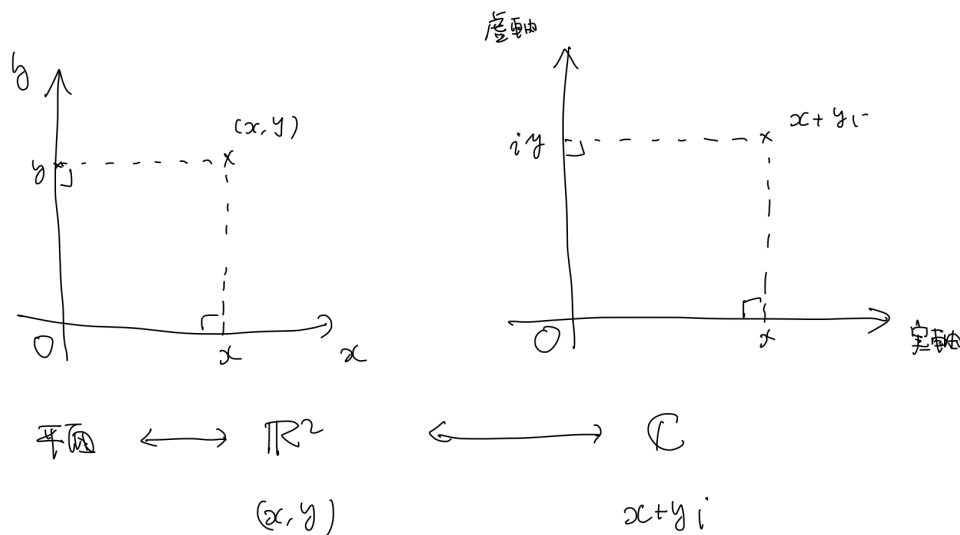
最近は結構色々なことに応用されている (今野 [4])。

1.4 複素 (数) 平面, Gauss 平面

2つ並べて図を描く。

$\mathbb{C}$ はある意味で拡張 $\mathbb{R}^2$ だから、本質的には座標平面の話と同じ。

「実軸」, 「虚軸」



1.5 平方根

1.5.1 定義

定義 1.2 (複素数の平方根) 複素数 c に対して、 $z^2 = c$ を満たす複素数 $z \in \mathbb{C}$ を c の**平方根** (a square root of c) とよぶ。

注意: 平方根と $\sqrt{\quad}$ の区別が重要。 $\mathbb{R}$ では簡単だった (説明できますか? この後で復習する。)

$\mathbb{C}$ では? $\sqrt{c}$ という記号については後回し。まずは平方根。

定理 1.3 (複素数の平方根) 任意の複素数 c に対して、 c の平方根 z が存在する。
 $c = 0$ のときは $z = 0$ のみ、 $c \neq 0$ のときは c の平方根はちょうど 2 つ存在 (互いに他方の -1 倍)。

$c = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) とするとき

$$(1.3) \quad z = \begin{cases} \pm\sqrt{a} & (a \geq 0, b = 0) \\ \pm\sqrt{-a}i & (a < 0, b = 0) \\ \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}i\right) & (b \neq 0). \end{cases}$$

(ここに現れた $\sqrt{\quad}$ は、非負実数に対する非負の平方根である。)

この式は覚えなくて (間違える可能性が高いから)、**求め方を覚えて、必要なときは求められる** ようにしておくのを勧める。

1.5.2 平方根の求め方をマスター

例 1.4 (やったことがある人が多いかもしれない) $z^2 = 1 - i$ を満たす複素数 z を求めよ ($1 - i$ の平方根を求めよ)。

(解答)

$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とおくと、 $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ であるから

$$z^2 = 1 - i \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1 \wedge 2xy = -1.$$

$2xy = -1$ より $y = -\frac{1}{2x}$. これを $x^2 - y^2 = 1$ に代入して

$$4x^4 - 4x^2 - 1 = 0.$$

$x \in \mathbb{R}$ であるから $x^2 \geq 0$ であることに注意すると (2 次方程式を解いて)

$$x^2 = \frac{2 + \sqrt{2^2 + 4}}{4} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{4}.$$

ゆえに

$$x = \pm \frac{\sqrt{2\sqrt{2} + 2}}{2}.$$

これから

$$y = -\frac{1}{2x} = \mp \frac{2}{2\sqrt{2\sqrt{2} + 2}} = \mp \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2} + 2}} = \mp \frac{\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}{2}.$$

ただし x, y を表す式の複号はすべて同順である。ゆえに

$$z = x + yi = \pm \left(\frac{\sqrt{2\sqrt{2} + 2}}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}{2}i \right).$$

1.5.3 実数の平方根と $\sqrt{\quad}$

中学校で次のことを学んだ。

- (1) $c \in \mathbb{R}$ に対して $x^2 = c$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するためには、 $c \geq 0$ であることが必要十分である。
- (2) $c \geq 0$ のとき、 x の平方根 x で $x \geq 0$ を満たすものはただ 1 つ存在する。
それを $\sqrt{c}$ と表す。
- (3) $c = 0$ であれば c の平方根は 0 のみで、 $\sqrt{c} = 0$ 。
- (4) $c > 0$ であれば c の平方根は $\sqrt{c}$ と $-\sqrt{c}$ の 2 つ。
- (5) 任意の $c_1, c_2 \geq 0$ に対して

$$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1c_2}.$$

高校では、 $c < 0$ に対して、 $\sqrt{c} := \sqrt{-c}i$ と定義した (例えば $\sqrt{-1} = i$, $\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$). この講義では、この定義は採用しないことにする。

中学校で学んだ $\sqrt{\text{非負実数}}$ という記号は使い続けるが、
高校で学んだ $\sqrt{\text{負数}}$ という記号は断りなしに使わない。

問 3.

- (1) 任意の $c_1, c_2 \geq 0$ に対して $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1c_2}$ であることを示せ。
- (2) 負の実数 c に対して $\sqrt{c} := \sqrt{-c}i$ と定義した場合、 $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1c_2}$ とは限らないことを示せ。

解答へ

1.5.4 関数論における $\sqrt{\quad}$

(事故多発地点)

複素数 c に対して $\sqrt{c}$ という記号を導入する。

$\sqrt{c}$ が何を表すかは、そのとき考えている問題に応じて決める (言い換えると一般的な定義はしない)。

実際、色々な場合がある。

- (a) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちの特定の 1 つを (何かルールを決めて) 表す。
- (b) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちのどちらかを表す (どちらであるか具体的なルールは決めない、ルールを書かない…ちょっとひどい気はしないでもない)。
- (c) $\sqrt{c}$ で c の平方根の両方を表す。

ただし、 $c \geq 0$ のときは、特に断りのない限り、 $\sqrt{c}$ は (これまで通り) c の非負の平方根を表すことにする。

(本当は $\sqrt[n]{}$ とか $\sqrt[n]{}$ とか、記号を変えて区別した方が良いのかもしれないけれど、そういう面倒なことはしないのが相場になっています。)

例えば $\sqrt{-3}$ は $\sqrt{3}i$ かもしれないし、 $-\sqrt{3}i$ かもしれないし、 $\pm\sqrt{3}i$ の両方を指しているかもしれない。

次の2次方程式の解の公式では、 $\sqrt{}$ は $\pm\sqrt{}$ という形で現れるので、(a)~(c) のどの流儀を採用しても同じ内容を表すことになる。

注意 1.5 (プログラミング言語での $\sqrt{}$) 多くのコンピュータのプログラミング言語では、 $\text{sqrt}(c)$ という関数が用意されていて、複素数 c に対してとにかく値を計算してくれる。つまり (a) の立場をとっている、と考えられる。どういう値を計算してくれるかについては後述する。 $\square$

1.5.5 2次方程式

系 1.6 (複素係数2次方程式) $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ とする。2次方程式 $az^2 + bz + c = 0$ の解は

$$(1.4) \quad z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ここで $\sqrt{b^2 - 4ac}$ は $b^2 - 4ac$ の平方根の任意の1つを表すとする (2つある場合、どちらを選んでも、 z は同じものを表すことになる)。

$D := b^2 - 4ac$ とするとき、 $D \neq 0$ なら2つ、 $D = 0$ ならば1つ (重根)。

2026/9/29 の講義はここまでです。これ以降は 2026/9/30 で説明します。

証明 $\left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ に注意する。(実係数のときと同様に) 平方完成を行うと

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right] \\ &= a \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right). \end{aligned}$$

ゆえに $az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-2b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. $\square$

注意 この証明は高校生のとき習って以来のお気に入りです。複素数にそのまま通用する。

1.6 共役複素数

1.6.1 定義と基本的性質

$$(1.5) \quad z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

の**共役複素数** (the complex conjugate of z) $\bar{z}$ を次式で定める。

$$(1.6) \quad \bar{z} := x - yi$$

一般に以下が成立する

$$(1.7) \quad \overline{\bar{z}} = z.$$

$$(1.8) \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \bar{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

(3 つ目は $z = x + yi$, $w = u + iv$ と置いて証明。4 つ目は 3 つ目を利用する。)

$$(1.9) \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad \text{すなわち} \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

ゆえに「 x, y で表せるものは、 $z, \bar{z}$ で表せる」。

$$(1.10) \quad z = \bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}.$$

1.6.2 実係数多項式の根

高校数学で、次のような証明問題はおなじみであろう。

- $1 + 2i$ が $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) の解ならば、 $1 - 2i$ も解である。
- $1 + 2i$ が $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) の解ならば、 $1 - 2i$ も解である。

定理 1.7 (実係数多項式の根の共役複素数も根) $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ に対して $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ と置く。 $c \in \mathbb{C}$ が $f(c) = 0$ を満たすならば、 $f(\bar{c}) = 0$ 。

証明

$$\begin{aligned}\overline{f(z)} &= \overline{a_0 z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \\ &= \overline{a_0} \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}} \overline{z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_{n-1}} \overline{z} + \overline{a_n} \\ &= \overline{a_0} (\overline{z})^n + \overline{a_{n-1}} (\overline{z})^{n-1} + \cdots + \overline{a_{n-1}} \overline{z} + \overline{a_n} \\ &= a_0 (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \overline{z} + a_n \\ &= f(\overline{z})\end{aligned}$$

が成り立つので

$$f(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{f(c)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\overline{c}) = 0.$$

□

1.7 絶対値

$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) の絶対値 (absolute value, modulus, magnitude) $|z|$ を次式で定義する。

$$(1.11) \quad |z| = |x + yi| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

これは、対応する $\mathbb{R}^2$ の要素 (数ベクトル) (x, y) の普通の大きさ (長さ, ノルム) と同じである。複素平面で、点 z と原点との距離を意味する。

$$(1.12) \quad |-z| = |z|, \quad |\overline{z}| = |z| \quad (\text{図を描いてみることを}),$$

さらに

$$(1.13) \quad z\overline{z} = |z|^2$$

が成り立つ。実際

$$z\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2.$$

ゆえに $z \neq 0$ ならば

$$(1.14) \quad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

定理 1.8 (絶対値の性質) (1) $|z| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow z = 0$.

(2) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (三角不等式)

(3) $|zw| = |z| |w|$. (系として、 $w \neq 0$ のとき $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$)

(4) $|z - w| \geq \left||z| - |w|\right|$.

証明 (1) $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「 $\|\mathbf{x}\| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 」と同じ。

(2) $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「 $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ 」と同じ。

(3) $z = a + bi, w = c + di$ において、左辺 & 右辺を計算して比較するか、
 $|zw|^2 = zw\bar{z}\bar{w} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2$ の $\sqrt{\quad}$ を取る。

(4) $|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w|$ であるから $|z| - |w| \leq |z - w|$.

z と w を入れ替えて $|w| - |z| \leq |w - z| = |z - w|$.

まとめると $||z| - |w|| = \max\{|z| - |w|, |w| - |z|\} \leq |z - w|$.

(任意の実数 x について、 $|x| = \max\{x, -x\}$ であることを用いた。)

□

A 問の解答

解答 1. (1.1) は

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書き換えられる。 $z \neq 0$ であれば $x^2 + y^2 > 0$ であるから

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$w = u + iv = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-iy}{x^2 + y^2}. \quad \square$$

1 行でまとめると

$$(x, y \in \mathbb{R}) \wedge x + iy \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

問題へ戻る

解答 2. このままでは採用できない。 $x + yi$ の逆元が存在と一意性が証明できていない段階では、 $\frac{1}{x + yi}$ はナンセンスな式であり、上の計算で分かるのは、「複素数 a, b, c ($b, c \neq 0$) について $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ 」が成り立ち、またもし $x + yi$ の逆元が一意的に存在するならば、それは $\frac{x - yi}{x^2 + y^2}$ である、ということくらい。実際に逆元であることを確認する、例えば

$$\begin{aligned} (x + yi) \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-y}{x^2 + y^2}i \right) &= \left(x \frac{x}{x^2 + y^2} - y \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) + \left(x \frac{-y}{x^2 + y^2} + y \frac{x}{x^2 + y^2} \right) i \\ &= \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + 0 \cdot i = 1 \end{aligned}$$

のような計算をすることが必要である。

□

問題へ戻る

解答 3.

- (1) $z_1 := \sqrt{c_1}$, $z_2 := \sqrt{c_2}$ とおくとき、 $z_1^2 = c_1$, $z_1 \geq 0$, $z_2^2 = c_2$, $z_2 \geq 0$. $z := z_1 z_2$ とおくと、 $z \geq 0$, $z^2 = (z_1 z_2)^2 = z_1^2 z_2^2 = c_1 c_2$ であるから、 $z = \sqrt{c_1 c_2}$. ゆえに $\sqrt{c_1} \sqrt{c_2} = z_1 z_2 = z = \sqrt{c_1 c_2}$.
- (2) $c_1 = c_2 = -1$ とすると、 $\sqrt{c_1} = \sqrt{-1} = \sqrt{-(-1)}i = i$, $\sqrt{c_2} = i$ であるから、 $\sqrt{c_1} \sqrt{c_2} = i \cdot i = -1$. 一方 $\sqrt{c_1 c_2} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$. ゆえに $\sqrt{c_1} \sqrt{c_2} \neq \sqrt{c_1 c_2}$. □

問題へ戻る

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/complex2026.pdf> (2014~).
- [2] 飯高茂：大学生にきちんと虚数を教えよう — コーシーの定理を教える前に — (第49回公私立数学系学科懇談会の活動報告), 数学通信, Vol. 15, No. 1, pp. 46–53 (2010年3月26日), <https://www.mathsoc.jp/assets/pdf/publications/tushin/backnumber/1501/1501iitaka.pdf>.
- [3] 堀源一郎：ハミルトンと四元数 人・数の体系・応用, 海鳴社 (2007).
- [4] 今野紀雄：四元数, 森北出版 (2016/12/1).