2023 年度 複素関数, 複素関数演習 期末試験問題

2024 年 1 月 25 日 (木曜) 9:30〜11:30 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

問 6 は必ず解答せよ。それ以外の問から 5 つを選択して (全部で 6 つの問に) 解答せよ。各問の解答の順番は自由である (ただし 1 つの問の解答は一箇所にまとめて書くこと)。

問 1. (1) $z = 3 - 3i$ のとき、$\dfrac{1}{z}$, $\operatorname{Arg} z$, z の極形式, $\operatorname{Log} z$ を求めよ (Arg と極形式以外は実部・虚部が分かる形に表せ)。　(2) $z^2 = 3 + 2i$ を満たす複素数 z を求めよ。

問 2.

(1) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f(z) = \cos(\overline{z})$ で定めるとき、f の実部と虚部を求め、f の微分可能性を調べよ。

(2) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は $c \in \Omega$ で微分可能であるならば、f の実部 u と 虚部 v は (a, b) で Cauchy-Riemann 方程式を満たすことを示せ。ただし $a := \operatorname{Re} c$, $b := \operatorname{Im} c$.

問 3. (1) 1 の 5 乗根を求めよ。　(2) $\sin z = 3i$ を解け。

問 4. 関数 $f(z) := \dfrac{z^4 - 7z^3 + 21z^2 - 32z + 25}{(z-1)(z-3)^2}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{1, 3\})$ について、以下の問に答えよ。

(1) $f(z)$ の部分分数分解を求めよ。　(2) f の 1 の周りの Laurent 展開を求めよ。　(3) f の 1 以外の極の位数とその点における留数を求めよ。　(4) e の周りの f の冪級数展開の収束半径を求めよ (e は自然対数の底)。

問 5. 次のものを求めよ。

(1) $\operatorname{Res}\left(\dfrac{z+4}{(z+1)(z+2)^3}; -2\right)$　(2) $\operatorname{Res}\left(\dfrac{\tan z}{z^4}; 0\right)$

問 6. 留数計算を利用して、次の定積分の値を求めよ。

(1) $I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^4+1)} dx$　(2) $I_2 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta \, d\theta$ ($n = 1$ の場合だけでも解けば半分の得点)

問 7. 以下の (a)〜(d) から 1 つの命題を選んで証明せよ。

(a) f が領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ で定義された正則関数で、$|f|$ が定数ならば、f 自身が定数関数である。

(b) $A := \{x \mid x \ge 1\}$, $B := \{x \mid x \le -1\}$, $\Omega := \mathbb{C} \setminus (A \cup B)$ とするとき、Ω は星型領域である。

(c) $c \in \mathbb{C}$, f が c のある近傍で正則、g は c を 1 位の極とするとき、c は $F := fg$ の高々1 位の極で $\operatorname{Res}(F; c) = f(c) \operatorname{Res}(g; c)$.

(d) $c \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $f : D(c; R) \to \mathbb{C}$ が正則であり、$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0$ であるならば、$D(c; R)$ で正則な関数 g が存在して、$f(z) = (z-c)^k g(z)$ $(z \in D(c; R))$ が成り立つ。

今のところ略解 (採点用)。リクエストがあれば部分的に詳しく書き直す。

1 解説

(1) $z = 3 - 3i$ のとき

$$\frac{1}{z} = \frac{1+i}{6}, \quad \operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4}, \quad z = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad \operatorname{Log} z = \frac{1}{2}\log 18 - \frac{\pi}{4}i.$$

(2)

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{13}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{13}-3\right)}\right)$$

宿題 1 の類題です。

Arg や Log は主値なのに、複数の値を書いたらダメです。平方根が 1 つだったり 4 つだったり、$\sqrt{\quad}$ の中が負だったりもダメです。

2 解説

(1) f の実部・虚部を u, v とする。$x, y \in \mathbb{R}$ のとき

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= \cos(\overline{x+iy}) = \frac{1}{2}\left(e^{i(x-iy)} + e^{-i(x-iy)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{y+ix} + e^{-y-ix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{y}(\cos x + i\sin x) + e^{-y}(\cos x - i\sin x)\right) = \cos x\cosh y + i\sin x\sinh y \end{aligned}$$

$$u = \cos x\cosh y, \quad v = \sin x\sinh y.$$

$$u_x = -\sin x\cosh y, \quad u_y = \cos x\sinh y, \quad v_x = \cos x\sinh y, \quad v_y = \sin x\cosh y.$$

これらは $\mathbb{R}^2$ で連続なので、u と v は $\mathbb{R}^2$ で C^1 級である。ゆえに u と v は $\mathbb{R}^2$ で全微分可能である。

$(u_x = v_y \wedge u_y = -v_x) \Leftrightarrow (\sin x = 0 \wedge (\cos x = 0 \vee \sinh y)) \Leftrightarrow (\sin x = 0 \wedge \sinh y = 0) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad (x,y) = (n\pi, 0)$.

すなわち Cauchy-Riemann 方程式は、$(x,y) = (n\pi, 0)$ $(n \in \mathbb{Z})$ の場合に限り成り立つ。ゆえに f は $n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ でのみ微分可能である。

(2) f が c で微分可能であるから、極限 $f'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ が存在する。(ちょっと端折った書き方をさせてもらいます。$u(a+h,b) - u(a,b) + i(v(a+h,b) - v(a,b))$ とか書く方がいいでしょうが…)

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ \operatorname{Im} h = 0}}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{R}}}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \\ &= u_x(a,b) + iv_x(a,b), \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ \operatorname{Re} h = 0}}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{R}}}\frac{f(c+ih)-f(c)}{ih} \\ &= \frac{1}{i}\left(u_y(a,b) + iv_y(a,b)\right) = v_y(a,b) - iu_y(a,b). \end{aligned}$$

ゆえに

$$u_x(a,b) + iv_x(a,b) = v_y(a,b) - iu_y(a,b).$$

すなわち

$$u_x(a,b) = v_y(a,b) \wedge u_y(a,b) = -v_x(a,b). \blacksquare$$

- 宿題 3, 宿題 4 の類題です。
- (1) 完答は少ないです。完答でない場合の中間点の稼ぎ方としては、u と v の偏導関数が具体的に何か、それから Cauchy-Riemann 方程式をちゃんと書いておくと良いかも。割とサボるのが多く、そういう答案はあまり点がもらえないです。
- (2) は割と出来た人が多く、良い傾向です。$f'(c)$ が存在することをはっきり言っておいて下さい。

3 解説

(1)

$$z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$$

であるが

$$\begin{aligned} z^4+z^3+z^2+z+1=0 &\Leftrightarrow z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0 \\ &\Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+z+\frac{1}{z}-1=0. \end{aligned}$$

$X=z+\frac{1}{z}$ とおくと、$X^2+X-1=0$ で、これは

$$X=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

と解ける。

$$z+\frac{1}{z}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad z+\frac{1}{z}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

から

$$2z^2+(1-\sqrt{5})z+2=0 \quad \vee \quad 2z^2+(1+\sqrt{5})z+2=0.$$

ゆえに

$$z=1,\frac{-(1-\sqrt{5})\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\frac{-(1+\sqrt{5})\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

(2) $X=e^{iz}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \sin z=3i &\Leftrightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=3i \Leftrightarrow X-\frac{1}{X}=-6 \Leftrightarrow X^2+6X-1=0 \\ &\Leftrightarrow X=-3\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot(-1)}=-3\pm\sqrt{10}=(\sqrt{10}-3)e^{i0},(\sqrt{10}+3)e^{i\pi} \\ &\Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z})iz=\log(\sqrt{10}-3)+2n\pi i,\log(\sqrt{10}+3)+i(\pi+2n\pi) \\ &\Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z})z=2n\pi-i\log(\sqrt{10}-3),(2n+1)\pi-i\log\left(\sqrt{10}+3\right). \end{aligned}$$

- (1) は宿題 2(4) の類題 (というよりも授業中にやってあります)。(2) は $e^z=w$ を解く話で宿題 9 の類題 ((1)(d) そのものですね)。
- (1) で複号を書いて説明がない人が少なくない。複号同順でも複号任意でも、どちらで解釈しても間違いになる答案がかなりありました。z は複素数なのにベクトルみたいに書いた答案もありました。
- (2) で $X=-3\pm\sqrt{10}$ まで来て、「$X\geq 0$ だから」と言って $X=-3-\sqrt{10}$ を捨てた人がいたけれど、平方根求めるときと混同しているのでしょうか。
- n が何か書かないとか、$n=0,1,2,\cdots$ (負の数を捨てる) とか、「宿題添削したのに」と言いたくなります。

4 解説

(1) $z^4-7z^3+21z^2-32z+25$ を $(z-1)(z-3)^2=-z^3-7z^2+15z-9$ で割ると、商が z, 余りが $6z^2-23z+25$.

$$f(z)=\frac{z^4-7z^3+21z^2-32z+25}{(z-1)(z-3)^2}=z+\frac{6z^2-23z+25}{(z-1)(z-3)^2}.$$

$$\frac{6z^2-23z+25}{(z-1)(z-3)^2}=\frac{a}{z-1}+\frac{b}{z-3}+\frac{c}{(z-3)^2}$$

を満たす a, b, c が存在する。$a=2$, $b=4$, $c=5$ であることが分かる。

$$f(z)=z+\frac{2}{z-1}+\frac{4}{z-3}+\frac{5}{(z-3)^2}.$$

(2) $z = 1 + (z-1)$.

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-1)-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-1}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}.$$

収束する $\Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-1| < 2$. 項別微分して

$$\frac{1}{(z-3)^2} = -\left(\frac{1}{z-3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{2^{n+2}}(z-1)^n.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + (z-1) - 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} + 5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}(z-1)^n \\ &= \frac{1}{4} + \frac{5}{4}(z-1) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{5n-3}{2^{n+2}}(z-1)^n + \frac{2}{z-1} \quad (0 < |z-1| < 2). \end{aligned}$$

(3) 3 が 1 以外の孤立特異点である。$z + \dfrac{2}{z-1}$ は $D(3;2)$ で正則であるから、冪級数展開できる: $z + \dfrac{2}{z-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-3)^n$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-3)^n + \frac{4}{z-3} + \frac{5}{(z-3)^2}.$$

ゆえに 3 は 2 位の極で $\mathrm{Res}(f;3) = 4$.

f は有理関数で、定義域は $\Omega := \mathbb{C}\setminus\{1,-2\}$ であるので、f は Ω で正則である。

(4) f は $\mathbb{C}\setminus\{1,3\}$ で正則で、1 と 3 は極である。$e = 2.71828\cdots$ であるから、$|e-1| > |e-3|$. (e からは 3 の方が 1 よりも近いので) ゆえに e を中心とする f の冪級数展開の収束半径は $|e-3| = 3-e$. ■

- 部分分数分解は宿題 8(1) の類題。Laurent 展開は宿題 13(2) の類題。
- 部分分数分解間を違えた人がちらほらいたけれど、その場合は、極力、(2), (3) はその部分分数分解が正しいとして採点しました (こういうのは Mathematica 万歳です)。
- (2) は等比級数の和の公式が正しく使えるか、項別微分が正しくできるか、Laurent 級数の形にまとめられるか (1 次の項が $z-1$ でなく z という人が多かった)、収束の条件が書かれているか、4 点をチェック。収束の確認をしない人がとても多いのは非常にまずいです。

5 解説

(1) $f(z) := \dfrac{z+4}{(z+1)(z+2)^3}$ とおく。-2 は分母の 3 位の零点であるので、-2 は f の高々3 位の極であり (実は 3 位の極)

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\,(f;-2) &= \lim_{z\to-2}\frac{1}{2!}\left((z+2)^3\frac{z+4}{(z+1)(z+2)^3}\right)'' = \frac{1}{2}\left(\frac{z+4}{z+1}\right)''\Bigg|_{z=-2} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{z+1}\right)''\Bigg|_{z=-2} = \frac{1}{2}\cdot 2\,\frac{3}{(z+1)^3}\Bigg|_{z=-2} = -3. \end{aligned}$$

(2) $f(z) = \tan z$ とおく。

$$\begin{aligned} f'(z) &= (\cos z)^{-2}, \\ f''(z) &= -2\,(\cos z)^{-3}\cdot(-\sin z) = 2\,(\cos z)^{-3}\sin z, \\ f'''(z) &= -6(\cos z)^{-4}\cdot(-\sin z)\cdot\sin z + 2\,(\cos z)^{-3}\cdot\cos z = 6(\cos x)^{-4}\sin^2 z + 2(\cos z)^{-2}, \end{aligned}$$

であるから $f'''(0)=2$.

0 は $\dfrac{\tan z}{z^4}$ の高々4位の極であるから

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\tan z}{z^4};0\right)=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^3\left[z^4f(z)\right]=\frac{1}{6}\lim_{z\to 0}(\tan z)'''=\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{3}.$$

あるいは

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=2,\quad f^{(4)}(0)=0,\quad f^{(5)}(0)=16.$$

より

$$f(z)=z+\frac{2}{3!}z^3+\frac{16}{5!}z^5+\cdots=z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\cdots,$$
$$\frac{\tan z}{z^4}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{3z}+\frac{2}{15}z+\cdots$$

であるから

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\tan z}{z^4};0\right)=\frac{1}{3}.$$

- (1) は宿題そのままです (宿題 13(3) の中の一つ)。(2) は色々な解き方ができます (直接似ている例は宿題にはなかったかも)。
- (2) で 0 は 3 位の極ですが、4 位の極と間違えた人が多い。「高々4 位の極」ならば正しいですが。3 位なので
$$\operatorname{Res}\left(\frac{\tan z}{z^4};0\right)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^{3-1}\left[z^3\cdot\frac{\tan z}{z^4}\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{\tan z}{z}\right)''$$
が成り立つわけだけれど、高々4 位なので
$$\operatorname{Res}\left(\frac{\tan z}{z^4};0\right)=\frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^{4-1}\left[z^4\cdot\frac{\tan z}{z^4}\right]=\frac{1}{3!}\left.(\tan z)'''\right|_{z=0}$$
も成り立つわけで、こちらの方が簡単かもしれないですね (単に tan の 3 階微分になるので考えやすい)。これは私は気づきませんでした。

6 解説

(1) $f(z):=\dfrac{z^2}{(z^2+1)(z^4+1)}$ とおくと、f の極 c は、$c=\pm i,\ \dfrac{\pm 1\pm i}{\sqrt{2}}$ (複号任意) で、いずれの位数も 1 である。$\operatorname{Im} c>0$ を満たすものは $c_1:=i$, $c_2:=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, $c_3:=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$.

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} c>0}\operatorname{Res}(f;c)=2\pi i\left(\operatorname{Res}(f;c_1)+\operatorname{Res}(f;c_2)+\operatorname{Res}(f;c_3)\right).$$

$c_1^2=-1$, $c_1^4=1$ であるから

$$\operatorname{Res}(f;c_1)=\left.\frac{z^2}{z^4+1}\cdot\frac{1}{2z}\right|_{z=c_1}=\frac{-1}{1+1}\cdot\frac{c_1}{2\cdot(-1)}=\frac{i}{4}.$$

$c_2^2=i$, $c_2^4=-1$ であるから

$$\operatorname{Res}(f;c_2)=\left.\frac{z^2}{z^2+1}\cdot\frac{1}{4z^3}\right|_{z=c_2}=\frac{i}{1+i}\cdot\frac{c_2}{-4}=\frac{i}{1+i}\cdot\frac{-1}{4}\frac{1+i}{\sqrt{2}}=-\frac{i}{4\sqrt{2}},$$

$c_3^2=-i$, $c_3^4=-1$ であるから

$$\operatorname{Res}(f;c_3)=\left.\frac{z^2}{z^2+1}\cdot\frac{1}{4z^3}\right|_{z=c_3}=\frac{-i}{1-i}\cdot\frac{c_3}{-4}=\frac{-i}{1-i}\cdot\frac{-1}{4}\frac{-1+i}{\sqrt{2}}=-\frac{i}{4\sqrt{2}}.$$

$$I_1=2\pi i\left(-\frac{i}{4}-\frac{i}{4\sqrt{2}}-\frac{i}{4\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\pi.$$

(2) $z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とおくと、$dz = ie^{i\theta} d\theta$ であるから、$d\theta = \dfrac{dz}{iz}$.

$$I_2 = \int_{|z|=1} \left(\frac{z + 1/z}{2} \right)^{2n} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2^{2n} i} \int_{|z|=1} \frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}} dz = \frac{2\pi i}{2^{2n} i} \operatorname{Res} \left(\frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}; 0 \right).$$

ここで二項定理を用いて

$$\operatorname{Res} \left(\frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}; 0 \right) = \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^{2n+1}} \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}\mathrm{C}_k \left(z^2\right)^k; 0 \right) = \operatorname{Res} \left(\sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}\mathrm{C}_k z^{2k-2n-1}; 0 \right) = {}_{2n}\mathrm{C}_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

であるから

$$I_2 = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{(2n)!}{(n!)^2}. \blacksquare$$

- (1) は (重根はないし) 割と素直なよくある問題 (授業中に分母が x^2+1 とか x^4+1 の場合を見せた)。(2) は手順通りにして、複素線積分に変換できて単位円内の留数の和 (ここでは 1 個だけ) となる、そこまでは素直。二項定理で Laurent 展開になるのは類例を見せたことがなかったかもしれないが、そんなに難しくない。

- k 位の極である場合、$\operatorname{Res}(f; c) = \dfrac{1}{(k-1)!} \lim\limits_{\substack{z \to c \\ z \neq c}} \left(\dfrac{d}{dx} \right)^{k-1} \left[(z-c)^k f(z) \right]$ ですが、なぜか

$$\operatorname{Res}(f; c) = 2\pi i \frac{1}{(k-1)!} \lim_{\substack{z \to c \\ z \neq c}} \left(\frac{d}{dx} \right)^{k-1} \left[(z-c)^k f(z) \right] \quad (\text{この式は間違い})$$

  としてしまった人が何人かいました。$2\pi i$ つけるのは、留数定理と混同しているのかな。

- (1) で $i, \frac{\pm 1 + i}{\sqrt{2}}$ における留数の話であることをきちんと書いた人には中間点あげました。なぜか $\operatorname{Res}(f; c_2)$ と $\operatorname{Res}(f; c_3)$ がキャンセルするようになっていた (片方の -1 倍がもう片方) 人が多い。何かの先入観？上に書いたように同じものです。

- (2) でも、$\dfrac{1}{2^{2n} i} \displaystyle\int_{|z|=1} \dfrac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}} dz$ や $\dfrac{2\pi i}{2^{2n} i} \operatorname{Res} \left(\dfrac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}; 0 \right)$ などを書いた人には、それなりの中間点をあげました。つまり、積分を複素線積分に直すこと、留数定理を使うこと、留数を求めること、3 つの要素があり、それぞれに中間点をつけることを考えると、全部はできなくても、できたところまではちゃんと書いておく、ということです。

- (2) で留数を計算する公式を使おうとした人が多いですが、この問題では、展開したときの $\frac{1}{z}$ の係数と考えるのが簡単です。$\sum_{k=0}^{2n}$ の $k = n$ の項の係数が留数です。 $\blacksquare$