

複素関数・同演習 第 25 回

～正則関数の性質 (前半)～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2023/>

2023 年 12 月 23 日

目次

- ① 本日の内容・連絡事項
- ② 正則関数の性質 (前半)
 - 正則関数の零点とその位数
 - 一致の定理
- ③ 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 「任意の正則関数は冪級数展開できる」ことが証明できました。それを用いて色々な正則関数の性質が証明できます (講義ノート [1] の §9)。急ぐべきものを2つ説明します。
 - 正則関数の零点とその位数
(証明の仕方は違うが、多項式の根の重複度と似ているので、覚えやすいはず。この後の「孤立特異点」の議論に必須。)
 - 一致の定理
(証明は背理法を使っていて、ちょっと分かりにくいかも。事実自体の理解が重要と考えて下さい。とても有名な内容です。)

- 12月19日の授業で、 $|a-c| < r$ のとき $\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ という補題を用いましたが、証明は積分路の変形で $\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{dz}{z-a}$ となるので、と簡単に済ませました。分かりにくいという声があったので、そのうち積分路の変形について補足しようと思いましたが、とりあえず https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2023/C23_1219_handout.pdf#page=13 を紹介しておきます (WWWにおいてあるPDFをクリックすると飛べます)。

定義 25.1 (正則関数の零点とその位数)

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 $c \in \Omega$ とする。

- ① c が f の **零点** (zero) であるとは、 $f(c) = 0$ が成り立つことをいう。
- ② c が f の零点であるとき、

$$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0 \wedge f^{(k)}(c) \neq 0$$

を満たす $k \in \mathbb{N}$ を f の零点 c の **位数** (order) と呼ぶ。

(f が恒等的に 0 であれば条件を満たす k は存在しないが、 f が恒等的に 0 でなければ上の条件を満たす k が存在することを証明できる。)

命題 25.2 (k 位の零点であるための条件)

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 $c \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$ とするとき、次の (i), (ii) は同値である。

- (i) c は f の k 位の零点である。
- (ii) c を含む開集合 $U (c \in U)$ と、 U で正則な関数 g が存在して、 $f(z) = (z - c)^k g(z)$ ($z \in U$) かつ $g(c) \neq 0$ 。

8.1 正則関数の零点とその位数

注意 25.3 (多項式の根について復習)

多項式 $f(z)$, $c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ について、以下の2条件は互いに同値である。

- ① $f(c) = f'(c) = \dots = f^{(k-1)}(c) = 0$ かつ $f^{(k)}(c) \neq 0$.
- ② c は $f(z)$ の根で、重複度は k (k 重根 — 単根のとき 1 重根というとして). すなわち $(\exists g(z) \in \mathbb{C}[z]) f(z) = (z - c)^k g(z)$, $g(c) \neq 0$.

証明には、多項式の割り算 ($a(z) = q(z)b(z) + r(z)$, $\deg r(z) < \deg b(z)$ なんとか...) から導かれる因数定理が使われた。

命題 25.2 はこの一般化と言える (証明の方法は — 割り算が出来るわけではないので — 異なる)。 □

8.1 正則関数の零点とその位数

例 25.4 (簡単な関数の零点の位数)

① $f(z) = z^2 + 2z + 1.$

$f(z) = (z + 1)^2$ であるから、 f の零点は -1 のみ。 $f'(z) = 2z + 2$ なので $f'(-1) = 0$ 。 $f''(z) = 2$ なので $f''(-1) \neq 0$ 。 -1 の位数は 2 。

② $f(z) = \sin z.$

$f(z) = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z = k\pi$ 。ゆえに f の零点は $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)。その位数は全て 1 である。実際、

$$f(k\pi) = \sin k\pi = 0, \quad f'(k\pi) = \cos k\pi = (-1)^k \neq 0.$$

③ $f(z) = \cos z - 1$ のとき、 $f(z) = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z = 2k\pi$ 。

$f'(z) = -\sin z$, $f''(z) = -\cos z$ であるから、 $k \in \mathbb{Z}$ とするとき

$$f(2k\pi) = 1 - 1 = 0,$$

$$f'(2k\pi) = -\sin 2k\pi = 0, \quad f''(2k\pi) = -\cos(2k\pi) = -1 \neq 0.$$

ゆえに $2k\pi$ は f の 2 位の零点である。

8.1 正則関数の零点とその位数

では、命題 25.2 を証明しよう。多項式と限らないので、割り算に基づく因数定理の証明はできない。それをどう克服するか注目してほしい ((i)⇒(ii) で **冪級数展開を用いる**)。

命題 25.2 の証明.

(i) ⇒ (ii) Ω は開集合であるから、ある $R > 0$ が存在して、 $\overline{D(c; R)} \subset \Omega$. 正則関数の冪級数展開可能性から

$$(\exists \{a_n\}_{n \geq 0} : \text{複素数列}) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (|z - c| < R).$$

このとき $a_n = f^{(n)}(c)/n!$ であるから、 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0, a_k \neq 0$. ゆえに

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - c)^n = (z - c)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - c)^{n-k} \\ &= (z - c)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - c)^n \quad (|z - c| < R). \end{aligned}$$

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - c)^n \text{ とおくと、} g \text{ は } D(c; R) \text{ で正則であり、} g(c) = a_k \neq 0. \quad \square$$

8.1 正則関数の零点とその位数

命題 25.2 の証明 (つづき).

(ii) \Rightarrow (i) (多項式と同じ証明が出来る)

$h(z) := (z - c)^k$ とおくと、 $r \leq k - 1$ ならば $h^{(r)}(c) = 0$, $h^{(k)}(c) = k!$ が成り立つ。
 $f(z) = h(z)g(z)$ であるから、Leibniz ルールにより

$$f^{(m)}(z) = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} h^{(r)}(z) g^{(m-r)}(z) \quad \left(\binom{m}{r} \text{ は二項係数} \right).$$

$0 \leq m \leq k - 1$ の場合は、 $h^{(r)}(c) = 0$ ($0 \leq r \leq m$) であるから

$$f^{(m)}(c) = \sum_{r=0}^m 0 = 0.$$

一方、 $m = k$ の場合は

$$f^{(k)}(c) = \binom{k}{k} h^{(k)}(c) g^{(0)}(c) = 1 \cdot k! \cdot g(c) \neq 0.$$

ゆえに c は f の k 位の零点である。

□

8.2 一致の定理

定理 25.5 (一致の定理 (the identity theorem), 一意接続の定理)

D は \mathbb{C} の領域 (弧連結な開集合)、 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ と $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 $c \in D$, 複素数列 $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は二条件

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c$
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n \in D$ かつ $z_n \neq c$ かつ $f(z_n) = g(z_n)$

を満たすとするとき、 D 全体で $f = g$.

おおざっぱに言うと、ある程度たくさんのあるところで $f = g$ ならば、全体で $f = g$ となる、ということである。

ただし、単に無限個の点 z_n で $f = g$ であるからといって、全体で $f = g$ とは限らない。例えば

$$f(z) = \sin z, \quad g(z) = 0, \quad z_n = n\pi$$

とすると

$$f(z_n) = 0 = g(z_n)$$

であるが、もちろん $f \neq g$.

8.2 一致の定理

z_n は関数 $F(z) := f(z) - g(z)$ の零点であるので、零点の話と関係する訳である。

一致の定理は上の形で提示されるのが普通だが、次の形で使うことが多い。

- D 内の線分や正則曲線の上で $f = g$ が成り立つならば、 $f = g$ が成り立つ。
(定数曲線 (像は1点) というのもあるので「正則曲線」としてある。)
- D 内の空でない開集合内で $f = g$ が成り立つならば、 $f = g$ が成り立つ。
(開集合は線分を含む。)

この定理を証明する前に、系を1つ、定理を使った例を2つ見てみよう。

8.2 一致の定理

正則関数の零点に関して、次の事実は重要である。

系 25.6 (定数でない正則関数の零点は孤立している (集積しない))

\mathbb{C} の領域 D における正則関数は定数関数に等しくない限り、その零点は互いに孤立している。すなわち c が定数でない正則関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ の零点ならば、

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall z \in D \cap D(c; \varepsilon) \setminus \{c\}) \quad f(z) \neq 0.$$

(十分小さな正数 ε を取ると、 c から距離 ε 未満の範囲では、 c 以外に f の零点はない。)

証明.

背理法を用いる。結論を否定すると、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists z \in D \cap D(c; \varepsilon) \setminus \{c\}) \quad f(z) = 0.$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して ($\varepsilon = 1/n$ として)、 $0 < |z_n - c| < \frac{1}{n}$, $f(z_n) = 0$ を満たす $z_n \in D$ が取れる。一致の定理から $f = 0$ in D が導かれる。これは矛盾である。 \square

8.2 一致の定理

一致の定理から、 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ が正則で

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = g(x)$$

を満たすならば、次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad f(z) = g(z).$$

例 25.7 (実関数を正則に拡張する仕方は1つしかない)

この講義では、初等関数を、微積分で得られた Taylor 展開を用いて正則関数に拡張した。例えば

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

から

$$(\star) \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

上で述べたことから、正則な $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ で、 $f(x) = \cos x$ ($x \in \mathbb{R}$) を満たすものは、存在するならば一意である ($\cos z$ に等しくないといけない)。言い換えると、 $\cos x$ の拡張に、正則性を要求する限り、 (\star) とする以外の選択肢はない。□

8.2 一致の定理

例 25.8 (関数関係不変の原理 (英語では?) の例として指数法則)

例えば実指数関数の指数法則

$$(1) \quad e^{x+y} = e^x e^y \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

が成り立つことは既知として、複素指数関数の指数法則

$$(2) \quad e^{z+w} = e^z e^w \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

が成り立つことを示そう。(同様にして三角関数の加法定理など示せる。)

実指数関数と複素指数関数を混同すると分かりにくくなるので、しばらく複素指数関数 e^z は $E(z)$, 実指数関数は e^x と書き分ける。 E は e^x の拡張である。つまり

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad E(x) = e^x$$

が成り立つことを認めて議論する^a。

任意の $y \in \mathbb{R}$ を固定して、関数 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$f(z) := E(z+y) - E(z)E(y) \quad (z \in \mathbb{C})$$

で定める。関数 E は正則であるから、 f は \mathbb{C} で正則である。

8.2 一致の定理

例 25.8 (つづき)

また、 $z = x \in \mathbb{R}$ のとき、(1) より

$$f(z) = f(x) = E(x+y) - E(x)E(y) = e^{x+y} - e^x e^y = e^x e^y - e^x e^y = 0.$$

ゆえに一致の定理により $(\forall z \in \mathbb{C}) f(z) = 0$. すなわち

$$(3) \quad (\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C}) \quad E(z+y) - E(z)E(y) = 0.$$

次に任意の $z \in \mathbb{C}$ を固定して、関数 $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$g(w) := E(z+w) - E(z)E(w) \quad (w \in \mathbb{C})$$

で定める。この g は \mathbb{C} で正則である。また、 $w = y \in \mathbb{R}$ のとき、(3) より

$$g(w) = g(y) = E(z+y) - E(z)E(y) = 0.$$

ゆえに一致の定理により $(\forall w \in \mathbb{C}) g(w) = 0$. すなわち

$$(\forall z \in \mathbb{C})(\forall w \in \mathbb{C}) \quad E(z+w) - E(z)E(w) = 0.$$

ゆえに指数法則 $E(z+w) = E(z)E(w)$ が成り立つ。 □

8.2 一致の定理

さて、定理 25.5 の証明であるが、結構長い。2つの Step に分けられる。

Step 1 は、 c の周りで冪級数展開して、その収束円の内部で $f = g$ が成り立つこと。

Step 2 は、いわゆる連結性の議論を行う。講義動画では Step 2 の説明は省略する。

8.2 一致の定理

定理 25.5 の証明

$f - g$ を新たに f と置いて考えることで、 $g = 0$ の場合に証明すれば良いことが分かる。

Step 1. D は開集合であるから、 $(\exists \varepsilon > 0) \overline{D(c; \varepsilon)} \subset D$. 正則関数の冪級数展開可能性より、 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が存在して、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (z \in D(c; \varepsilon)).$$

まずこの円盤 $D(c; \varepsilon)$ で $f = 0$ であることを示す。

実は任意の n に対して $a_n = 0$ である。実際、もしそうでないと仮定すると、 $\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ s.t. $a_n \neq 0$. そのような n のうち、最小のものを k とおくと、

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0, \quad a_k \neq 0.$$

すると

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - c)^n = (z - c)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - c)^n \quad (z \in D(c; \varepsilon)).$$

8.2 一致の定理

定理 25.5 の証明 (続き)

$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-c)^n$ は $z \in D(c; \varepsilon)$ で収束し、

$$g(z_n) = \frac{f(z_n)}{(z_n - c)^k} = \frac{0}{(z_n - c)^k} = 0.$$

ゆえに

$$a_k = g(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

これは矛盾である。ゆえに任意の n に対して $a_n = 0$ 。ゆえに $f(z) = 0$ ($z \in D(c; \varepsilon)$)。

Step 2.

$$D_0 := \left\{ z \in D \mid (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) = 0 \right\}, \quad D_1 := \left\{ z \in D \mid (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) \neq 0 \right\}$$

とおくと (簡単な論理の法則を用いて)

$$D_0 \cup D_1 = D, \quad D_0 \cap D_1 = \emptyset.$$

実は D_0 と D_1 は開集合である (理由は次のスライド)。また $c \in D_0$ であるから $D_0 \neq \emptyset$ 。

以下に紹介する命題 25.9 より、 $D_1 = \emptyset$, $D_0 = D$ 。ゆえに $f = 0$ in D 。

8.2 一致の定理

定理 25.5 の証明 (続き)

D_0 は開集合であること 実際、 $z_0 \in D_0$ ならば、 $(\exists R > 0) (\exists \{a_n\}_{n \geq 0}: \text{複素数列})$
 $(\forall z \in D(z_0; R)) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. ところが $z_0 \in D_0$ より、任意の n に対して
 $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = 0$ なので、 $f(z) = 0$. ゆえに $D(z_0; R) \subset D_0$. ゆえに D_0 は開集合である。

D_1 は開集合であること $f^{(n)}$ が連続関数であることから、 D_1 は開集合であることが分かる。実際、 $z_0 \in D_1$ とするとき、 $(\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

- D が開集合であることから、 $(\exists \delta_1 > 0) D(z_0; \delta_1) \subset D$.
- $\varepsilon := |f^{(n)}(z_0)|$ とおくと、 $\varepsilon > 0$ であり、 $f^{(n)}$ は連続であるから、 $(\exists \delta_2 > 0)$

$(\forall z \in D: |z - z_0| < \delta_2) |f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0)| < \varepsilon$. このとき

$$|f^{(n)}(z)| = |f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z_0) + f^{(n)}(z)| \geq |f^{(n)}(z_0)| - |f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z)| > \varepsilon - \varepsilon = 0.$$

ゆえに $f^{(n)}(z) \neq 0$. 従って $z \in D_1$.

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと、 $\delta > 0$ かつ $D(z; \delta) \subset D_1$. ゆえに D_1 は開集合である。 \square

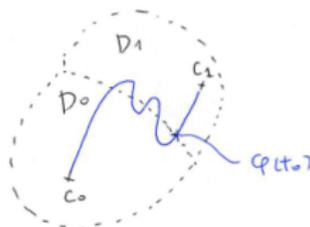
8.2 一致の定理

命題 25.9 (弧連結な開集合は連結)

D は \mathbb{C} の弧連結な開集合、 D_0 と D_1 は \mathbb{C}^n の開集合で $D_0 \cup D_1 = D$, $D_0 \cap D_1 = \emptyset$ とすると、 D_0 と D_1 のいずれかが空集合である。

命題 25.9 の証明 背理法を用いる。 $D_0 \neq \emptyset$ かつ $D_1 \neq \emptyset$ と仮定して矛盾を導く。 $c_0 \in D_0$, $c_1 \in D_1$ を取る。

D は弧連結であるから、ある連続な $\varphi: [0, 1] \rightarrow \Omega$ が存在して $\varphi(0) = c_0$, $\varphi(1) = c_1$.



$$I_0 := \{t \in [0, 1] \mid \varphi(t) \in D_0\}, \quad I_1 := \{t \in [0, 1] \mid \varphi(t) \in D_1\}$$

とおくと

$$I_0 \cup I_1 = [0, 1], \quad I_0 \cap I_1 = \emptyset, \quad 0 \in I_0, \quad 1 \in I_1.$$

D_0 と D_1 は開集合、 φ は連続であるから、 $(\exists \delta_0 > 0) [0, \delta_0] \subset I_0$ 、また $(\exists \delta_1 > 0) [1 - \delta_1, 1] \subset I_1$.

$t_0 := \sup I_0$ とおくと、 $0 < t_0 < 1$. t_0 と $0, 1$ との距離は $d := \min\{t_0, 1 - t_0\} > 0$.

8.2 一致の定理

証明 (続き)

$t_0 \in I_0$ の場合、 $\varphi(t_0) \in D_0$. D_0 は開集合であるから、

$$\exists \varepsilon_1 \in (0, d) \quad \text{s.t.} \quad (t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1) \subset I_0.$$

すると $t_0 = \sup I_0 \geq t_0 + \varepsilon_1$ となり、矛盾が生じる。

$t_0 \in I_1$ の場合、 $\varphi(t_0) \in D_1$. D_1 は開集合であるから、

$$\exists \varepsilon_2 \in (0, d) \quad \text{s.t.} \quad (t_0 - \varepsilon_2, t_0 + \varepsilon_2) \subset I_1.$$

I_1 と共通部分のない I_0 の上限が I_1 の内部にあるのは矛盾である。 □

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート。
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2023/complex2023.pdf>
(2014～).