複素関数・同演習 第 20 回

～線積分 (2), Cauchy の積分定理 (1)～

かつらだ まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2024/

2024 年 12 月 11 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 前回に引き続き、複素線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の性質を説明する (講義ノート [1] の§5)。
- 前回授業中に説明したことですが、これから体感的には進行が速くなります (新しい話題がどんどん出て来る)。心して下さい。

5.2 曲線に関する用語の定義 (続き)

定義 20.1 (逆向きの曲線 $-C$, 曲線の和 $C_1 + C_2$)

1. $C\colon z = \varphi(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ の逆向きの曲線 $-C\colon z = \varphi(-t)$ $(t \in [-\beta, -\alpha])$
2. $C_1\colon z = \varphi_1(t)$ $(t \in [\alpha_1, \beta_1])$, $C_2\colon z = \varphi_2(t)$ $(t \in [\alpha_2, \beta_2])$ について、C_1 の終点 $=C_2$ の始点のとき。$C_1 + C_2$ を次のように定義する。

$$\varphi(t) := \begin{cases} \varphi_1(t) & t \in [\alpha_1, \beta_1] \\ \varphi_2(t - \beta_1 + \alpha_2) & t \in [\beta_1, \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2] \end{cases}$$

教科書は $C_2 C_1$ と表している。これはもっともなところがあるのだけれど…この講義では $C_1 + C_2$ と表す (その方がふつう)。後者は、後で終点=始点でない場合にも使う (そういうのは曲線鎖という)。

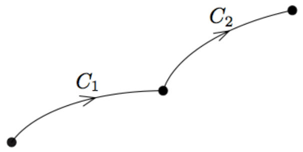


図 1: C_1 の終点 $=$ C_2 の始点ならば $C_1 + C_2$ が作れる

定理 20.2 (線積分の性質)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続、$\lambda \in \mathbb{C}$, C, C_1, C_2 は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線とする。このとき次が成り立つ。

1. $$\int_C (f(z) + g(z))\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz.$$
2. $$\int_C \lambda f(z)\,dz = \lambda \int_C f(z)\,dz.$$
3. $$\left| \int_C f(z)\,dz \right| \le \int_C |f(z)|\,|dz|.$$
4. $$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz.$$
5. $$\int_{C_1 + C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

証明 (1), (2) は簡単なので省略する。(5) は演習問題とする。

3. 一般に連続関数 $F\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ に対して,
$$\left|\int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |F(t)|\,dt$$
が成り立つことを認めれば、$F(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ について適用して、
$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |f(\varphi(t))\varphi'(t)|\,dt = \int_C |f(z)|\,|dz|.$$

4. $z = \varphi(-t)$ $(t \in [-\beta,-\alpha])$ とすると、$dz = -\varphi'(-t)dt$ であるから、
$$\int_{-C} f(z)\,dz = \int_{-\beta}^{-\alpha} f(\varphi(-t))\cdot(-\varphi'(-t))dt = \int_{-\alpha}^{-\beta} f(\varphi(-t))\varphi'(-t)\,dt.$$
$s = -t$ とおくと、$t = -\alpha$ のとき $s = \alpha$, $t = -\beta$ のとき $s = \beta$, $dt = -ds$ であるから、
$$\int_{-C} f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\varphi(s))\varphi'(s)\cdot(-1)ds = -\int_C f(z)\,dz. \quad \square$$

注意 20.3

孤長要素に関する線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,|dz| = \int_C f\ ds$ についても (1), (2) は成立する。(3), (4) については若干の注意が必要である。例えば

$$\int_{-C} f(z)\,|dz| = \int_C f(z)\,|dz|. \quad \square$$

定理 20.4

線積分の値は、曲線の向きを変えないパラメーター付けによらない。

証明.

一般の場合の証明を書くことはサボるが、次の例を検討すると理解できるであろう。 $\square$

例 20.5

次の 5 つの曲線について考える。

$C_1\colon z = e^{i\theta}\ (\theta \in [0,\pi])$
$C_2\colon z = e^{i\pi t}\ (t \in [0,1])$
$C_3\colon z = e^{i\pi t^2}\ (t \in [0,1])$
$C_4\colon z = -t + i\sqrt{1-t^2}\ (t \in [-1,1])$
$C_5\colon z = t + i\sqrt{1-t^2}\ (t \in [-1,1])$

曲線の像はいずれも、原点を中心とする単位円周の上半分である:

$$C_j^* = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1,\ \mathrm{Im}\, z \geq 0\} \quad (j = 1,2,3,4,5).$$

$j = 1, \cdots, 4$ に対して C_j の向きは同じ、$C_5 = -C_4$ であるので C_5 は逆向きである。

上の定理を認めると、任意の f に対して $\displaystyle\int_{C_j} f(z)\,dz$ の値は皆同じであり、$\displaystyle\int_{C_5} f(z)\,dz = -\int_{C_4} f(z)\,dz$ であることが分かる。

例 20.5 (続き)

この例については、直接的な変数変換で示すことができる。

(1) $$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} f(e^{i\theta}) \cdot ie^{i\theta}\,d\theta.$$

(1) で、$\theta = \pi t$ と変数変換すると

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot ie^{i\pi t} \cdot \pi\,dt = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot i\pi e^{i\pi t}\,dt = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

(1) で、$\theta = \pi t^2$ と変数変換すると

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^1 f(e^{i\pi t^t}) \cdot ie^{i\pi t^2} \cdot \pi 2t\,dt = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot 2\pi ie^{i\pi t^2}\,dt = \int_{C_3} f(z)\,dz.$$

以下同様に証明できる。

問 $\displaystyle\int_{C_4} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz$ であることを示せ。

宿題10について

線積分の計算がテーマ。

- まず原始関数が存在するかどうか。存在して見つけられれば、それを使って簡単に計算できる。そうでない場合は、定義に基づいて考えてみる。
- 曲線がどういうものか、はあく (把握) すること。図を描く習慣を身につけることを勧める。
- パラメーター付け φ が与えられていない場合、自分で用意する。一通りではないが、どれでも構わない (どれで計算しても、間違えない限り、結果は同じはず)。
- (4) の Γ は前回の講義で式を書いたけれど、それは使わない。C_1 (下の辺を左から右), C_2 (右の辺を下から上)、C_3 (上の辺を右から左), C_4 (左の辺を上から下) とするとき、

  $$\Gamma = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

  であるから

  $$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz + \int_{C_4} f(z)\,dz.$$

  各 C_j は簡単なパラメーター付けがとれる。C_3 ならば $z = (1+i) - t$ $(t \in [0,1])$ とか。

6 Cauchy の積分定理

いよいよ Cauchy の積分定理を説明する。

一般的な形の Cauchy の積分定理をすぐ扱うのは困難である。段階的に進めて行くことにする。今日は Cauchy の積分定理がどういうものか、直観的に分かる形で説明して、三角形の周の場合 (Goursat-Pringsheim の定理) を述べて、きちんと証明する。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式[1] は簡単で

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

というものである。

仮定が問題であるが、普通は次の 3 つである (他に Green の定理を用いて証明するバージョンもあり、それは少し異なる)。

(a) f は $\mathbb{C}$ の領域 Ω で正則 (Ω の任意の点で微分可能)。

(b) C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。

以上は分かりやすいが、次が要注意

(c) C の「囲む」範囲で f は正則。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

[1] 余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、尋ねれば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると尋ねても答えられないんじゃないか？と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。その仮定を言えるようになるのが目標。

6.1 はじめに

再掲

- (a) f は $\mathbb{C}$ の領域 Ω で正則。
- (b) C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。

  以上は分かりやすいが、次が要注意
- (c) C の「囲む」範囲で f は正則。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

(a) と (b) だけでは不足で、何か (c) のような条件が必要なことは、

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \quad (\text{つまり } \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\},\ f(z) = \frac{1}{z},\ C\colon z = e^{i\theta}\ (\theta \in [0, 2\pi]))$$

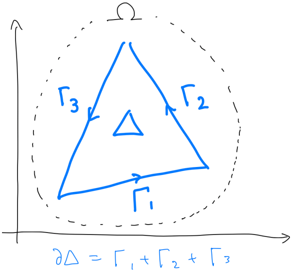
を思い出すと分かる ((a) と (b) を満たすのに、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ ではない)。

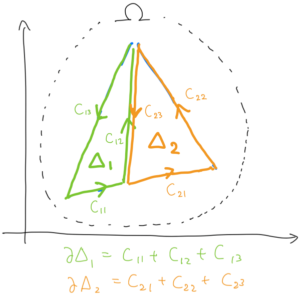
しかし (c) の「囲む」はあいまいで、定理にするのは一仕事必要である。

C が円周のような簡単な曲線であれば、直観に従って「囲む」を解釈しても間違いは起こさないが、そうでない場合は微妙なことがある。

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続、Ω に含まれる三角形 Δ を 2 つの三角形 Δ_1, Δ_2 に分割するとき、次式が成り立つ (∂某 は、某 の周を正の向きに一周する曲線)。

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz. \tag{2}$$





実際、

$$\partial\Delta = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3, \quad \partial\Delta_1 = C_{11} + C_{12} + C_{13}, \quad \partial\Delta_2 = C_{21} + C_{22} + C_{23}$$

とするとき $C_{23} = -C_{12}$ であるから

$$\int_{C_{23}} f(z)\,dz = \int_{-C_{12}} f(z)\,dz = -\int_{C_{12}} f(z)\,dz.$$

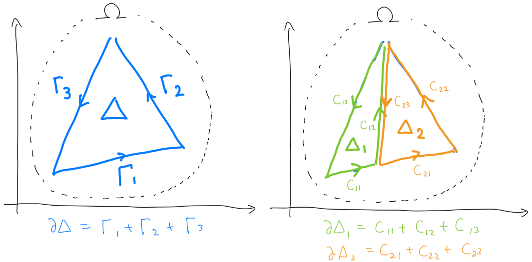
6.2 準備

ゆえに

$$\int_{C_{12}} f(z)\,dz + \int_{C_{23}} f(z)\,dz = 0.$$

ゆえに

$$\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz = \left(\int_{C_{11}} + \int_{C_{12}} + \int_{C_{13}}\right) + \left(\int_{C_{21}} + \int_{C_{22}} + \int_{C_{23}}\right)$$
$$= \int_{C_{11}+C_{21}} + \int_{C_{22}} + \int_{C_{13}}$$
$$= \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} = \int_{\partial\Delta}. \quad \square$$



2024 年 12 月 11 日の講義はここまでです。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2024/complex2024.pdf (2014〜).