複素関数・同演習 第19回
〜線積分〜

かつらだ まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2024/

2024年12月10日

目次

本日の内容・連絡事項

- 先週は休講してしまい、すみませんでした。先週の分は補講を行います。講義内容の順番を多少入れ替えして (証明などは後回しにするなど)、演習が必要なものは早めにすませるように工夫します。宿題の解答は、PDF で公開することにします。
- いよいよ線積分 (講義ノート [1] では、§5) に入る。
- ここからは、講義内容を PDF で公開します。講義の日の晩か、翌日まででに WWW に置きます。

5 線積分　5.1 線積分の定義

いよいよ関数論の佳境の入り口である。実関数のときもそうであったように、微分と積分の両方が絡むと強力である。

(高速道路までの街中の道をトロトロ走って来たが、これからスピードをあげる感じ。景色がどんどん変わる。)

定義 19.1 (線積分)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$C: z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$f\colon C^* \to \mathbb{C}$ は連続とする。ただし $C^* := \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$. このとき

$$\int_C f(z)\,dz := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \tag{1}$$

とおき、f の曲線 C に沿う**線積分** (the line integral along C) と呼ぶ。

また

$$\int_C f(z)\,|dz| := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\left|\varphi'(t)\right|\,dt \tag{2}$$

と定める。弧長要素に関する線積分と呼ぶ。$\displaystyle\int_C f\,ds$ とも書かれる。

例 19.2

$f(z) = z^2$, $C\colon z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ のとき。$\varphi'(\theta) = ie^{i\theta}$ であるから

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^\pi f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^\pi (e^{i\theta})^2 \cdot ie^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^\pi e^{3i\theta}\,d\theta$$
$$= i\left[\frac{e^{3i\theta}}{3i}\right]_0^\pi = \frac{1}{3}\left(e^{3i\pi} - e^{3\cdot 0}\right) = \frac{(-1)-1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

例 19.3

$f(z) = \dfrac{1}{z}$, $C\colon z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ のとき。$\varphi'(\theta) = ie^{i\theta}$ であるから

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} \cdot ie^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta$$
$$= 2\pi i.$$

注意事項

1. 曲線の始点、終点が一致しても経路は無限にたくさんあるので、実 1 変数関数の積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ のように、始点と終点を指定することでは積分は定まらない。
2. φ は区分的に C^1 級であるから

   $(\exists\{t_j\}_{j=0}^m) \quad \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta \wedge$ 各小区間 $[t_{j-1}, t_j]$ で φ は C^1 級.

   分点 t_j において φ の片側微分係数は存在するが、微分係数 $\varphi'(t_j)$ は存在しないことがありうる。

   $$\int_C f(z)\,dz := \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

   とみなすと良い。

5.1 線積分の定義

3. $F(t) := f(\varphi(t))\varphi'(t)$ は、実変数の複素数値関数である。複素数値関数の積分が初めてという人がいるかもしれない。実数値関数の積分と同様に Riemann 和の極限として定義しても良いし、

$$\text{(3)} \qquad \int_\alpha^\beta F(t)\,dt := \int_\alpha^\beta U(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta V(t)\,dt$$

のように定義しても良い (ただし $U(t) := \operatorname{Re} F(t)$, $V(t) := \operatorname{Im} F(t)$)。

$\alpha < \beta$ であれば

$$\text{(4)} \qquad \left|\int_\alpha^\beta F(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |F(t)|\,dt$$

が成り立つ。Riemann 和で定義する場合は、三角不等式から得られる

$$\left|\sum_j F(t_j)\Delta t_j\right| \le \sum_j |F(t_j)|\,\Delta t_j$$

から証明出来る。(3) で定義する場合はちょっとした演習問題になる。

5.1 線積分の定義

4. (とても良く使う不等式。)

(5) $$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz|\,.$$

実際、C が $z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ とすると

$$\left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right| \le \int_\alpha^\beta \left|f(\varphi(t))\varphi'(t)\right|dt$$

と書き換えられるが、これは (4) によって確かに成立する。

大抵は、この後

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz| \le \max_{z\in C^*}|f(z)|\int_C |dz| = \max_{z\in C^*}|f(z)| \times (C\text{ の弧長})$$

と評価することになる。

注　$C^* = C$ の跡 $=\varphi$ の値域 $=\mathrm{Image}\,\varphi = \{\varphi(t)\mid t\in[\alpha,\beta]\}$ である。

注　定義より $\displaystyle\int_C |dz| = \int_\alpha^\beta \left|\varphi'(t)\right|dt$ であるから、これは C の弧長である。

5.2 原始関数

なぜ線積分が重要か。

複素関数においては、それこそが微分の逆演算と考えることができるものだからである。

定理 19.4 (微積分の基本定理、のようなもの)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続で原始関数 F を持つ ($F' = f$)、C は Ω 内の区分的 C^1 級曲線とするとき、

$$\int_C f(z)\,dz = F(b) - F(a). \tag{6}$$

が成り立つ。ただし、a, b はそれぞれ C の始点、終点である。

((6) の右辺を、$[F(z)]_a^b$ や $[F(z)]_{z=a}^{z=b}$ で表す。)

証明　C が $z=\varphi(t)$ ($t\in[\alpha,\beta]$) と表せて、φ が C^1 級である場合、

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C F'(z)\,dz=\int_\alpha^\beta F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F\left(\varphi(t)\right)dt$$
$$=\left[F\left(\varphi(t)\right)\right]_{t=\alpha}^{t=\beta}=F\left(\varphi(\beta)\right)-F\left(\varphi(\alpha)\right)=F(b)-F(a).$$

φ が連続かつ区分的 C^1 級の場合、ある $\{t_j\}_{j=0}^m$ が存在して

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta,\quad \varphi \text{ は各 } [t_{j-1},t_j] \text{ で } C^1 \text{ 級}.$$

このとき

$$\int_C f(z)\,dz=\sum_{j=1}^m\int_{t_{j-1}}^{t_j}F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\sum_{j=1}^m\left(F(\varphi(t_j))-F(\varphi(t_{j-1}))\right)$$
$$=F\left(\varphi(t_m)\right)-F\left(\varphi(t_0)\right)=F(b)-F(a).$$

(本当はいつもこのように積分範囲を分割して議論すべきだけど、ワンパターンの議論なので、以下では、φ が C^1 級のときの証明だけを書いて済ませることが多い。) □

5.2 原始関数

上の定理は、1 変数実関数の場合とある意味では同じである。しかし、

連続な 1 変数実関数は必ず原始関数を持つ。

$$(\because F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \text{ とおくと } F'(x) = f(x))$$

は成り立つが、

連続な 1 変数複素関数は原始関数を持つとは限らない。

ゆえに原始関数が存在することは、仮定として与える必要がある。

(このあたりの事情は、ベクトル解析でも同じである。任意のベクトル場 $\boldsymbol{f}$ に対して、$\boldsymbol{f}$ のポテンシャル ($\nabla F = \boldsymbol{f}$ を満たす F のこと) が存在するとは限らない。もし存在すれば、$\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = F(\boldsymbol{b}) - F(\boldsymbol{a})$.)

5.2 線積分の定義 (続き)

上の 2 つの例を見直してみる。

例 19.5 (原始関数が存在すれば楽々計算　例 19.2 再訪)

$f(z)=z^2$, $C\colon z=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,\pi])$ とする。$F(z):=\dfrac{z^3}{3}$ は $F'=f$ を満たす。ゆえに

$$\int_C f(z)\,dz=\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=1}^{z=-1}=\frac{(-1)^3-1^3}{3}=-\frac{2}{3}\quad\text{(もちろん前の計算と一致).}$$

例 19.6 (原始関数が存在しない例　例 19.3 再訪)

(前半) $f(z)=\dfrac{1}{z}$ $(z\in\Omega:=\mathbb{C}\setminus\{0\})$ とする。f の原始関数は存在しない。実際、もしも原始関数 F が存在すると仮定すると、$C\colon z=e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ は Ω 内の C^1 級曲線であるから

$$\int_C f(z)\,dz=[F(z)]_{z=1}^{z=1}=F(1)-F(1)=0.$$

ところがすでに見たように $\int_C f(z)\,dz=2\pi i$ であるから、矛盾が生じる。

5.2 原始関数

そういうわけで、原始関数が存在するかどうかが大事である。

- 多項式の場合は、必ず存在する。
- 収束冪級数の場合は、必ず存在する。
- 有理関数の場合は log が出るケースがある。その場合は存在しないかもしれない。要注意。
- $x=\mathrm{Re}\,z$, $y=\mathrm{Im}\,z$, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, $\mathrm{Arg}\,z$, $\bar z$. これらの原始関数は存在しない。

例 19.6 (原始関数が存在しない例 (つづき)　例 19.3 再訪)

(後半) $\Omega' := \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ における対数関数の分枝 $\log z$ を、$z = re^{i\theta}$ ($r > 0$, $\theta \in (0, 2\pi)$) に対して

$$\log z := \log r + i\theta$$

と定める。$F(z) := \log z$ は Ω' で正則であり、$F'(z) = \dfrac{1}{z}$.

$0 < \varepsilon < \pi$ を満たす ε に対して

$$C_\varepsilon \colon z = e^{i\theta} \quad (\varepsilon \le \theta \le 2\pi - \varepsilon)$$

とおく。C_ε は Ω' 内の C^1 級曲線で

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = [F(z)]_{z=e^{i\varepsilon}}^{z=e^{i(2\pi-\varepsilon)}} = \log e^{i(2\pi-\varepsilon)} - \log e^{i\varepsilon}$$
$$= (2\pi - \varepsilon)i - i\varepsilon = 2(\pi - \varepsilon)i.$$

$\varepsilon \to +0$ のときの極限 $2\pi i$ が、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 2\pi i$ に一致するのはもっともらしい。

5.2 原始関数

原始関数が存在しない場合は、例えば例 19.2, 19.3 でやったように、定義に戻って計算すると良い。

例 19.7 (原始関数の存在しない例)

$C\colon z = (1+2i)t$ $(t \in [0,1])$ とする。$f(z) = |z|$ は原始関数を持たない。

$$\int_C |z|\,dz = \int_0^1 \sqrt{t^2 + (2t)^2} \cdot (1+2i)\,dt = (1+2i)\sqrt{5}\int_0^1 |t|\,dt$$
$$= (1+2i)\sqrt{5}\int_0^1 t\,dt = \frac{(1+2i)\sqrt{5}}{2}. \quad \square$$

5.3 曲線に関する用語の定義

曲線のいろは　Ω は $\mathbb{C}$ の開集合, $C\colon z=\varphi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ は Ω 内の曲線 (i.e. $\varphi\colon[\alpha,\beta]\to\Omega$ 連続) とする。

1. $\varphi([\alpha,\beta])=\{\varphi(t)\mid t\in[\alpha,\beta]\}$ を C **の像**または**跡**と呼び、C^* と表す。
2. C が C^1 **級**とは、φ が C^1 級 (つまり φ が微分可能で、φ' が連続) であることをいう。
3. C が C^1 **級正則**とは、C が C^1 級かつ $(\forall t\in[\alpha,\beta])$ $\varphi'(t)\neq 0$ であることをいう。(C^* はなめらかで、尖ったりしないし、いきなりバックしたりもしない。)
4. C が**区分的** C^1 **級**とは、ある $\{t_j\}_{j=1}^m$ が存在して、
$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta,$$
かつ各 $[t_{j-1},t_j]$ で φ は C^1 級であることをいう。
5. C が**区分的** C^1 **級正則**とは、ある $\{t_j\}_{j=1}^m$ が存在して、
$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta,$$
かつ各 $[t_{j-1},t_j]$ で φ は C^1 級かつ $\varphi'(t)\neq 0$ (ただし $t=t_{j-1},t_j$ では片側微分係数である。) であることをいう。

5.3 曲線に関する用語の定義

6. C が**閉曲線**とは、$\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$ であることをいう。
7. C が**単純** (Jordan arc) $\Leftrightarrow$ 閉曲線でないときは φ が単射、閉曲線であるときは $[\alpha,\beta)$ で単射であることをいう。
   要するに「自分自身と交わらない」こと。
   単純閉曲線を **Jordan 曲線** (Jordan curve) ということがある。
8. 区分的 C^1 級単純正則閉曲線が**正の向き** $\Leftrightarrow$ 進行方向の左手に C が囲む領域が見える。

実は **Jordan 曲線定理**「平面内の任意の単純閉曲線は、平面を 2 つの領域 (一方は有界、もう一方は非有界) にわけ、曲線の像は両者の境界である。」が成り立つ。証明が大変なので、この定理はこの講義では使わない。

例 19.8 (円周)

$C\colon z=c+re^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ は、C^1 級正則単純閉曲線である。C の像は中心 c, 半径が r の円周で、C は正の向きである。単に $|z-c|=r$ と書いたら、この曲線のこととみなす (慣習)。

例 19.9 (正方形の周)

図の正方形の周。

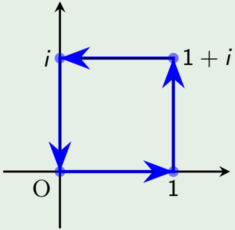

図 1: 正方形の周を正の向きに一周する

$$C\colon z=\varphi(t):=\begin{cases} t & (t\in[0,1]) \\ 1+i(t-1) & (t\in[1,2]) \\ 1+i-(t-2) & (t\in[2,3]) \\ i-i(t-3) & (t\in[3,4]) \end{cases}$$

このとき、$C^*=$ 正方形の周. 区分的に C^1 級正則、単純閉曲線、正の向き。
しかし!! 計算をするときに上の式は使わない (もっと楽な方法がある)。 □

2024 年 12 月 10 日の講義はここまで。

参考文献 I

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 数学科での講義科目「関数論 2」の講義ノートあらため 現象数理学科の「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/complex-function.pdf (2008〜).