

複素関数・同演習 第1回

～ガイダンス, 複素関数の定義と基本的な性質～

かつらだ まさし

桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2023/>

2023年9月20日

目次

- ① 自己紹介・ガイダンス
 - 自己紹介
 - 注意
 - ガイダンス
- ② (複素) 関数論とは
 - 授業内容
 - 歴史
- ③ 参考文献

自己紹介

かつらだ まさし

- 桂田 祐史
- 専門は数値解析 (数値計算法の数理の関数解析的研究)
- 研究室は高層棟 910 号室
- 質問・相談はメールでも可
(メールアドレスは katurada あっと meiji どっと ac ドット jp)

- 火曜の「複素関数」、水曜の「複素関数演習」通しで1つの科目と考えて欲しい。2つに分けてあるのはシステム上の問題。片方だけ履修しようとする人が毎年いるけれど、今年度は動画があるわけではなく、自習して単位取得するのは難しい。
- この授業では私語禁止 (何か話したいことがあったら教室の外で)。質問はいつでも自由にして下さい。
- 現在、Covid-19, インフルエンザが流行中 (前者については、3つの変異株の流行が連続して来ていて3ヶ月以上流行が続いている。)。 「感染リスクを自ら判断した上で」ということになっているけれど、そのためには判断材料が必要で、政府やマスコミから提供されているわけでないので、なかなか難しい。現在高校生以下で大きな流行になっていて、大学の夏休みが終わって、大学はどうなるだろう、というところ。
「学校衛生管理マニュアル」(R5/4/28) で「マスクの着用を強いることのないように」、 「マスクの着脱を強いることのないように」
「学校保健安全法施行規則」
「発症から10日を経過するまでは、当該児童生徒に対してマスクの着用を推奨すること」(R5/4/28)
(大学は学校じゃないけどね)

- ① 「複素関数」とは何か。講義で何をするか。
複素変数、複素数値の関数 ($w = f(z)$ の z と w が複素数) を**複素関数**とよぶ。
分野の名前としては、**(複素) 関数論**とか**複素解析**などが使われる。
関数論の入門部分を講義する。内容は、理工系の学科の相場 (**後述**)。
原則として証明を付ける。

ガイダンス

- ① 「複素関数」とは何か。講義で何をするか。
複素変数、複素数値の関数 ($w = f(z)$ の z と w が複素数) を**複素関数**とよぶ。
分野の名前としては、**(複素) 関数論**とか**複素解析**などが使われる。
関数論の入門部分を講義する。内容は、理工系の学科の相場 (**後述**)。
原則として証明を付ける。
- ② 質問は次のいずれかで行うこと。
(a) 直接会って質問する (授業直後、研究室訪問)。 (b) メールで尋ねる。

ガイダンス

- ① 「複素関数」とは何か。講義で何をするか。
複素変数、複素数値の関数 ($w = f(z)$ の z と w が複素数) を**複素関数**とよぶ。
分野の名前としては、**(複素) 関数論**とか**複素解析**などが使われる。
関数論の入門部分を講義する。内容は、理工系の学科の相場 (**後述**)。
原則として証明を付ける。
- ② 質問は次のいずれかで行うこと。
(a) 直接会って質問する (授業直後、研究室訪問)。 (b) メールで尋ねる。
- ③ 急ぎの質問・相談はメールで。
メールアドレスは、Oh-o! Meiji のシラバスの補足に記してある。

ガイダンス

- ① 「複素関数」とは何か。講義で何をするか。
複素変数、複素数値の関数 ($w = f(z)$ の z と w が複素数) を**複素関数**とよぶ。
分野の名前としては、**(複素)関数論**とか**複素解析**などが使われる。
関数論の入門部分を講義する。内容は、理工系の学科の相場**(後述)**。
原則として証明を付ける。
- ② 質問は次のいずれかで行うこと。
(a) 直接会って質問する (授業直後、研究室訪問)。 (b) メールで尋ねる。
- ③ 急ぎの質問・相談はメールで。
メールアドレスは、Oh-o! Meiji のシラバスの補足に記してある。
- ④ 「複素関数」「複素関数演習」両方とも履修すること。1科目だけの履修は、ルール上は出来るが、勧めない。
(宿題・期末レポートの量は変わらないので1科目だけの履修は損。)

ガイダンス

- ① 「複素関数」とは何か。講義で何をするか。
複素変数、複素数値の関数 ($w = f(z)$ の z と w が複素数) を**複素関数**とよぶ。
分野の名前としては、**(複素) 関数論**とか**複素解析**などが使われる。
関数論の入門部分を講義する。内容は、理工系の学科の相場 (**後述**)。
原則として証明を付ける。
- ② 質問は次のいずれかで行うこと。
(a) 直接会って質問する (授業直後、研究室訪問)。 (b) メールで尋ねる。
- ③ 急ぎの質問・相談はメールで。
メールアドレスは、Oh-o! Meiji のシラバスの補足に記してある。
- ④ 「複素関数」「複素関数演習」両方とも履修すること。1科目だけの履修は、ルール上は出来るが、勧めない。
(宿題・期末レポートの量は変わらないので1科目だけの履修は損。)
- ⑤ 毎週1つ宿題を出す。翌週の火曜2限までに Oh-o! Meiji 「複素関数**演習**」に提出すること。原則として、単一の PDF ファイル (A4 サイズ) とする。最初のページに学年・組・番号・氏名を明記すること。大部分は添削してフィードバックするので、コメントを読むこと。

ガイダンス (2)

- 「複素関数」のみ履修する人は連絡して下さい。宿題をどのように提出するか、相談します。

ガイダンス (2)

- 「複素関数」のみ履修する人は連絡して下さい。宿題をどのように提出するか、相談します。
- 毎週の宿題 30%, 期末試験 70% で成績評価する (予定)。
宿題の得点はメ切りを守って提出するかどうか、真面目にやったか。
翌週火曜の授業で宿題を解説するので、それ以降の提出は0点とする。
特別な事情がある場合は出来るだけ早く個別に相談すること。

ガイダンス (2)

- 「複素関数」のみ履修する人は連絡して下さい。宿題をどのように提出するか、相談します。
- 毎週の宿題 30%, 期末試験 70% で成績評価する (予定)。
宿題の得点はメ切りを守って提出するかどうか、真面目にやったか。翌週火曜の授業で宿題を解説するので、それ以降の提出は0点とする。特別な事情がある場合は出来るだけ早く個別に相談すること。
- 復習を推奨する。

WWW サイト <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex/> で講義メモ、宿題、講義ノート [1]、演習問題 (解答付)、過去問 (解答付) 等公開
ミラーサイト <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/>

ガイダンス (2)

- 「複素関数」のみ履修する人は連絡して下さい。宿題をどのように提出するか、相談します。
- 毎週の宿題 30%, 期末試験 70% で成績評価する (予定)。
宿題の得点はメ切りを守って提出するかどうか、真面目にやったか。翌週火曜の授業で宿題を解説するので、それ以降の提出は0点とする。特別な事情がある場合は出来るだけ早く個別に相談すること。
- 復習を推奨する。
WWW サイト <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex/> で講義メモ、宿題、講義ノート [1]、演習問題 (解答付)、過去問 (解答付) 等公開ミラーサイト <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/>
- 期末試験の解答に必要なことは宿題に出て来るはず。
(過去問は公開しているが、まずは宿題の復習から始めるのを勧める。) 市販のテキストを使って問題演習しても十分な準備ができる。

ガイダンス (2)

- 「複素関数」のみ履修する人は連絡して下さい。宿題をどのように提出するか、相談します。
- 毎週の宿題 30%, 期末試験 70% で成績評価する (予定)。
宿題の得点はメ切りを守って提出するかどうか、真面目にやったか。翌週火曜の授業で宿題を解説するので、それ以降の提出は0点とする。特別な事情がある場合は出来るだけ早く個別に相談すること。
- 復習を推奨する。
WWW サイト <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex/> で講義メモ、宿題、講義ノート [1]、演習問題 (解答付)、過去問 (解答付) 等公開
ミラーサイト <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/>
- 期末試験の解答に必要なことは宿題に出て来るはず。
(過去問は公開しているが、まずは宿題の復習から始めるのを勧める。) 市販のテキストを使って問題演習しても十分な準備ができる。
- 神保 [2] を教科書とする。
丸善 eBook Library (<https://elib.maruzen.co.jp/elib/>) にある。
特に

<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063>

(複素)関数論とは 授業内容

(複素)関数論は、おおざっぱに言って、複素関数の微積分である。

(複素)関数論とは 授業内容

(複素)関数論は、おおざっぱに言って、複素関数の微積分である。

複素関数とは、変数も値も複素数であるような関数のことをいう ($w = f(z)$ の z, w が複素数ということ)。

(複素)関数論とは 授業内容

(複素)関数論は、おおざっぱに言って、複素関数の微積分である。

複素関数とは、変数も値も複素数であるような関数のことをいう ($w = f(z)$ の z, w が複素数ということ)。特に微分可能な複素関数を**正則関数**と呼ぶ。

(複素)関数論とは 授業内容

(複素)関数論は、おおざっぱに言って、複素関数の微積分である。

複素関数とは、変数も値も複素数であるような関数のことをいう ($w = f(z)$ の z, w が複素数ということ)。特に微分可能な複素関数を**正則関数**と呼ぶ。

豊富な内容があるが、この講義の目標はその入門部分で、具体的には

Cauchy の積分定理、**Cauchy の積分公式**、**留数**、**留数定理**による定積分計算
どれもほぼ Cauchy (1789–1857) がやったこと。

(複素) 関数論とは 授業内容

(複素) 関数論は、おおざっぱに言って、複素関数の微積分である。

複素関数とは、変数も値も複素数であるような関数のことをいう ($w = f(z)$ の z, w が複素数ということ)。特に微分可能な複素関数を**正則関数**と呼ぶ。

豊富な内容があるが、この講義の目標はその入門部分で、具体的には

Cauchy の積分定理、**Cauchy の積分公式**、**留数**、**留数定理**による定積分計算
どれもほぼ Cauchy (1789–1857) がやったこと。

Cauchy の積分定理

複素平面内の**閉曲線** C が囲む領域と C 上で f が正則ならば

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Cauchy の積分公式

複素平面内の単純閉曲線 C が囲む領域と C 上で f が正則ならば

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \text{ は } C \text{ の囲む領域内の任意の点}).$$

正則関数の冪級数展開可能性

c の近傍で**正則**な関数 f は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n,$$
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta \quad \left(= \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \right)$$

と**冪級数展開** (Taylor 展開) 出来る。ゆえに f は無限回微分可能である。

正則関数の冪級数展開可能性

c の近傍で**正則**な関数 f は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n,$$
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta \quad \left(= \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \right)$$

と**冪級数展開** (Taylor 展開) 出来る。ゆえに f は無限回微分可能である。

留数定理による定積分計算

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \frac{1}{(z^2 + 1)'} \Big|_{z=i} = 2\pi i \frac{1}{2z} \Big|_{z=i} = \pi.$$

(微積分で \tan^{-1} を使っても計算できるけれど... $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$ のような原始関数を求めるのが面倒な場合も同様に計算できる)

正則関数の冪級数展開可能性

c の近傍で**正則**な関数 f は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n,$$
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta \quad \left(= \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \right)$$

と**冪級数展開** (Taylor 展開) 出来る。ゆえに f は無限回微分可能である。

留数定理による定積分計算

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \frac{1}{(z^2 + 1)'} \Big|_{z=i} = 2\pi i \frac{1}{2z} \Big|_{z=i} = \pi.$$

(微積分で \tan^{-1} を使っても計算できるけれど... $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$ のような原始関数

を求めるのが面倒な場合も同様に計算できる。 **不用議の理解に時間があまる**

なぜ複素数を使う必要があるのか？

歴史 Cardano (1501–1576, イタリア)

Cardano は 3 次方程式の解法を発表した (1545 年)。 $x^3 + px + q = 0$ に対して

$$(1) \quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

は解となる (**Cardano の公式**)。

歴史 Cardano (1501–1576, イタリア)

Cardano は 3 次方程式の解法を発表した (1545 年)。 $x^3 + px + q = 0$ に対して

$$(1) \quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

は解となる (**Cardano の公式**)。3 次方程式にも**判別式**があり、今の場合は

$$\Delta := -(27q^2 + 4p^3)$$

歴史 Cardano (1501–1576, イタリア)

Cardano は 3 次方程式の解法を発表した (1545 年)。 $x^3 + px + q = 0$ に対して

$$(1) \quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

は解となる (**Cardano の公式**)。3 次方程式にも**判別式**があり、今の場合は

$$\Delta := -(27q^2 + 4p^3) = -108 \left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \right] \quad (108 = 2^2 \cdot 3^3).$$

歴史 Cardano (1501–1576, イタリア)

Cardano は 3 次方程式の解法を発表した (1545 年)。 $x^3 + px + q = 0$ に対して

$$(1) \quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

は解となる (**Cardano の公式**)。3 次方程式にも**判別式**があり、今の場合は

$$\Delta := -(27q^2 + 4p^3) = -108 \left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \right] \quad (108 = 2^2 \cdot 3^3).$$

これを用いると、(1) は次のように書き換えられる:

$$(2) \quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}.$$

歴史 Cardano (1501–1576, イタリア)

Cardano は 3 次方程式の解法を発表した (1545 年)。 $x^3 + px + q = 0$ に対して

$$(1) \quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

は解となる (**Cardano の公式**)。3 次方程式にも**判別式**があり、今の場合は

$$\Delta := -(27q^2 + 4p^3) = -108 \left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \right] \quad (108 = 2^2 \cdot 3^3).$$

これを用いると、(1) は次のように書き換えられる:

$$(2) \quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}.$$

Δ は判別式の名にふさわしく、次のことが成り立つ (微積分で容易に証明可能)。

- $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 相異なる 3 実根を持つ。
- $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 重根を持ち、かつすべての根は実数である。
- $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 1 つの実根と、互いに複素共役な虚根を持つ。

歴史 Cardano (1501–1576, イタリア) 続き

$\Delta \leq 0$ のときは、 $\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}$ は非負の実数であり、(2) の x は、2つの実数の3乗根の和であるから、**実数解**を与える。特に $\Delta < 0$ のときは、これが唯一の実数解である。

歴史 Cardano (1501–1576, イタリア) 続き

$\Delta \leq 0$ のときは、 $\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}$ は非負の実数であり、(2) の x は、2つの実数の3乗根の和であるから、**実数解**を与える。特に $\Delta < 0$ のときは、これが唯一の実数解である。

3次方程式なので、他に2つの根があるはず。Cardano は書かなかったけれど、

$$\omega^3 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}, \quad \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}.$$

ただし $\omega := \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$.

歴史 Cardano (1501–1576, イタリア) 続き

$\Delta \leq 0$ のときは、 $\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}$ は非負の実数であり、(2) の x は、2つの実数の3乗根の和であるから、**実数解**を与える。特に $\Delta < 0$ のときは、これが唯一の実数解である。

3次方程式なので、他に2つの根があるはず。Cardano は書かなかったけれど、

$$\omega^3 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}, \quad \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}.$$

ただし $\omega := \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$.

問題は $\Delta > 0$ の場合 (相異なる3実根を持つ場合)。このとき、 $\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}$ は純虚数であり、(2) の x は、2つの虚数の3乗根の和である。

Cardano は著書の中で、 $\Delta > 0$ となる例は取り上げなかったが、虚数の必要性に気づいていたらしく、負数の平方根については「和が10、積40がである2数を求めよ (答は $t^2 - 10t + 40 = 0$ を解いて $5 \pm \sqrt{15}i$)」という有名な問題を残している。

歴史 Bombelli (1526–1572)

Bombelli は、虚数について詳しい分析をして、Cardano の公式 (1) は $\Delta > 0$ のときも解を表す、と述べた。

歴史 Bombelli (1526–1572)

Bombelli は、虚数について詳しい分析をして、Cardano の公式 (1) は $\Delta > 0$ のときも解を表す、と述べた。

例えば

$$x^3 = 15x + 4.$$

この解は $x = 4, x = -2 \pm \sqrt{3}$ (高校数学で解ける)。

歴史 Bombelli (1526–1572)

Bombelli は、虚数について詳しい分析をして、Cardano の公式 (1) は $\Delta > 0$ のときも解を表す、と述べた。

例えば

$$x^3 = 15x + 4.$$

この解は $x = 4$, $x = -2 \pm \sqrt{3}$ (高校数学で解ける)。

この方程式に対して、Cardano の公式 (1) は

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

という数を与えるが、Bombelli は虚数に関する計算法を導入し、この x は 4 に等しい、と論じた。

歴史 Bombelli (1526–1572)

Bombelli は、虚数について詳しい分析をして、Cardano の公式 (1) は $\Delta > 0$ のときも解を表す、と述べた。

例えば

$$x^3 = 15x + 4.$$

この解は $x = 4$, $x = -2 \pm \sqrt{3}$ (高校数学で解ける)。

この方程式に対して、Cardano の公式 (1) は

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

という数を与えるが、Bombelli は虚数に関する計算法を導入し、この x は 4 に等しい、と論じた。

実は、 $\Delta > 0$ (相異なる 3 実数解) のとき、“虚数を使わずに解を表す公式” は存在しないことが分かった。

- **de Moivre (1667–1754)**

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (1730 \text{ 年})$$

- **Euler (1707–1783)**

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1748 \text{ 年}), \quad e^{i\pi} = -1$$

- **Gauss (1777–1855)**

複素平面、代数学の基本定理、実は他にも色々知っていたが発表せず。

- **Cauchy (1789–1857)**

定積分計算のために、ほぼこの講義の内容を考え出した。

- **19 世紀は関数論の世紀 (?)**

Abel (1802–1829), Jacobi (1804–1851), Weierstrass (1815–1897), Riemann (1826–1866) など。楕円関数、代数関数、Riemann 面

- **量子力学**

量子力学には複素数が本質的に必要である。

雑誌「数理科学」2022 年 8 月号は「複素解析の探求」特集。

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート。
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2023/complex2023.pdf>
(2014～).
- じんぼう
[2] 神保道夫：複素関数入門，現代数学への入門，岩波書店 (2003)，丸善 eBook
では
<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063>
でアクセスできる.