



正多角形板のChladni図形の対称性

遠藤 小欽¹, 桂田 祐史², 末松 信彦²

¹明治大学大学院先端数理科学研究科

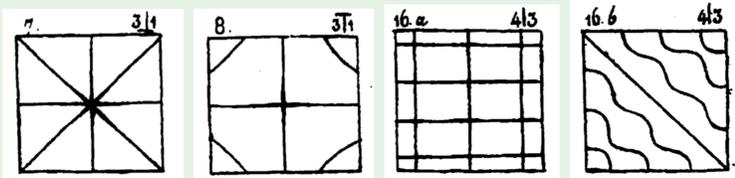
²明治大学総合数理学部

2015年9月9日

Chladni図形とは

砂や塩などの粒子を特定の周波数で振動している板の上に撒くと、粒子が振動の節(i.e., 振幅が0)に集まり、現れる幾何学的図形のこと。

Examples (Chladni [2])



薄い板の振動のKirchhoff-Loveモデル

$z = z(x, y, t)$ を時刻 t の点 (x, y) における板の変位とすると

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x, y, t) = -D\Delta^2 z(x, y, t) \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty)$$

$$\mu\Delta z + (1 - \mu)\frac{\partial^2 z}{\partial n^2} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty)$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(\Delta z + (1 - \mu)\frac{\partial}{\partial S}\frac{\partial^2 z}{\partial \tau}) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty)$$

角の点で $\frac{\partial^2 z}{\partial \tau \partial n}$ の2つの片側極限が等しい

ここで

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad D = \frac{Eh^2}{12\rho(1 - \mu^2)}$$

であり, Ω は板の占める領域, S は境界 Ω に沿った弧長, $\frac{\partial}{\partial \tau}$ は接線方向の微分, $\frac{\partial}{\partial n}$ は外向き法線方向の微分を表す。

ただし, E : ヤング率, h : 板の厚さ, ρ : 密度, μ : ポアソン比 とする。

固有値問題(無次元化版)

$$\Delta^2 u = \lambda u \quad \text{in } \Omega$$

$$\mu\Delta u + (1 - \mu)\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(\Delta u + (1 - \mu)\frac{\partial}{\partial S}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau}) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

角の点で $\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n}$ の2つの片側極限が等しい

先行研究(正方形領域)

Chladni ([2])

節線パターンを2つの指数 m, n を用いて, $m|n, \overline{m|n}, \underline{m|n}$ として表した。

Ritz ([4])

Ritzの方法を提案し, 領域 $(0, 1) \times (0, 1)$ において, 数値計算を行い, 次の結果を得た。

板の固有関数 W_m, W_{mn}^-, W_{mn}^+ ($0 \leq n \leq m$) は, それぞれ

- $w_m(x, y) = u_m(x)u_m(y)$
- $w_{mn}^-(x, y) = u_m(x)u_n(y) - u_n(x)u_m(y)$
- $w_{mn}^+(x, y) = u_m(x)u_n(y) + u_n(x)u_m(y)$

により良い近似が与えられる。ただし, $u_m(x)$ は長さ1の自由な棒の固有関数とする。(これはRitzの方法による級数解の主要な2項だけ残したものに相当する)。

このとき, w_m, w_{mn}^-, w_{mn}^+ はそれぞれ $m|n, \overline{m|n}, \underline{m|n}$ に対応している。

また, 固有関数 W_m, W_{mn}^-, W_{mn}^+ の節線パターンの特徴によって, 5つのクラスに分類した。

Waller ([1],[3])

Ritzの結果を現代的な実験で検証を行った上で, Ritzによる5つのクラスを7つに増やし, 二面体群を用いて節線パターンの対称性を説明した。

D_n を正 n 角形の合同変換群(二面体群)とする。つまり, R を中心の周りに $\frac{2\pi}{n}$ だけ回転させる変換, S を対称軸(y 軸)に関する鏡映変換, I を恒等変換としたとき

$$D_n = \{I, R, R^2, \dots, R^{n-1}, S, RS, R^2S, \dots, R^{n-1}S\}$$

である。

Wallerのクラス	m, n	m, n の偶奇	固有関数	対称性	Wallerの記号	Ritzのクラス
1	$m = n$	奇, 奇	W_m	D_4	+	Iの一部
2	$m = n$	偶, 偶	W_m	D_4		IIの一部
3	$m > n$	奇, 奇	W_{mn}^-	D_4		III
4	$m > n$	偶, 偶	W_{mn}^-	D_4	X	IV
5	$m > n$	奇, 奇	W_{mn}^+	D_4	+	Iの一部
6	$m > n$	偶, 偶	W_{mn}^+	D_4		IIの一部
7	$m > n$	偶, 奇	W_{mn}^+, W_{mn}^-	$\{I, R^2, S, R^2S\} \simeq D_2$	/	V

本研究の目的

正方形領域における結果を正多角形へ拡張すること。

弱形式

$\forall v$ に対して

$$\lambda \iint_{\Omega} uv \, dx dy = \iint_{\Omega} \left(\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - (1 - \mu) \left[\frac{\partial^2 u \partial^2 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 u \partial^2 v}{\partial y^2 \partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] \right) dx dy$$

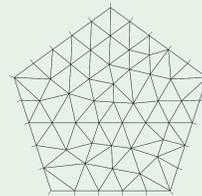
以下, 単位円に内接し, $(0, 1)$ が頂点であるような正 n 角形を Ω_n とする。

数値計算のアルゴリズム

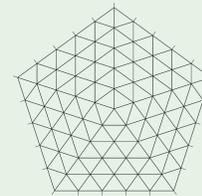
弱形式と Fujino-Morley 要素による有限要素法を用いて, 固有値問題は行列の固有値問題に帰着される。

- 自動メッシュ分割を用いると, 重複固有値に対応する行列の固有値は重複しない。
→メッシュ分割に**対称性がない**ことが理由の一つである。
- D_n 対称なメッシュ分割を用いると, 重複固有値に対応する行列の固有値が重複することが期待される。

メッシュ分割(正五角形, $N=5$)



FreeFEM++による自動メッシュ分割



D_n 対称メッシュ分割

固有値の重複と節線パターン

	λ : double (重複度 = 2)	λ : simple (重複度 = 1)
自動メッシュ	25th eigenfunction, eigenvalue=9211.76	26th eigenfunction, eigenvalue=9211.88
D_n 対称メッシュ	25th eigenfunction, eigenvalue=9220.85	27th eigenfunction, eigenvalue=9409.31

正 n 角形領域における節線パターンの対称性

Theorem

固有値 λ が simple のとき, 固有関数の節線は D_n 対称性を持つ。

一方で, λ が double の場合, 対応する1次独立な固有関数 ϕ, ψ の節線が対称性を持つとは限らない。そこで,

$$u := a\phi + b\psi, \quad v := -b\phi + a\psi$$

を考える。 $a, b \in \mathbb{R}$ をうまく選んで, 対称性を持つような u, v を求める。

Proposition

固有値 λ が double のとき, λ に対応する固有関数 u で, $u(0, 1) = 0$ を満たすものが存在する。

このとき, 実は u と v の節線は対称性を持つ。

数値計算結果

n	λ が double の時の u と v の節線の対称性
3	$\{I, S\} \simeq D_1$
4	$\{I, R^2, S, R^2S\} \simeq D_2$
5	$\{I, S\} \simeq D_1$
6	$\{I, R^3, S, R^3S\} \simeq D_2$
7	$\{I, S\} \simeq D_1$
8	$\{I, R^4, S, R^4S\} \simeq D_2, \{I, R^2, R^4, R^6, S, R^2S, R^4S, R^6S\} \simeq D_4$
9	$\{I, S\} \simeq D_1, \{I, R^3, R^6, S, R^3S, R^6S\} \simeq D_3$
10	$\{I, R^5, S, R^5S\} \simeq D_2$
11	$\{I, S\} \simeq D_1$
12	$\{I, R^6, S, R^6S\} \simeq D_2, \{I, R^3, R^6, R^9, S, R^3S, R^6S, R^9S\} \simeq D_4, \{I, R^2, R^4, R^6, R^8, R^{10}, S, R^2S, R^4S, R^6S, R^8S, R^{10}S\} \simeq D_6$

数値計算の結果から次が成り立つと予想される。

Conjecture

$n \geq 3$ を整数, ℓ を n の約数とする。

- (1) n が奇数ならば, D_ℓ の対称性を持つ固有関数が存在する。
- (2) n, ℓ が共に偶数ならば, D_ℓ の対称性を持つ固有関数が存在する。
- (3) n が偶数, ℓ が奇数ならば, D_ℓ の対称性を持つ固有関数は存在しない。

References

- [1] M. D. WALLER, *Vibrations of free square plates: Part I. Normal vibrating modes*, Proceedings of Physical Society, **51** (1939).
- [2] E. F. F. CHLADNI, *Neue Beyträge zur Akustik*, Leipzig, 1817.
- [3] M. D. WALLER, *Chladni Figures – A Study In Symmetry*, 1961.
- [4] W. RITZ, von: *Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern*, Annalen der Physik Vol. 333, Issue 4, pp. 737–786, (1909).