

# 振動現象の数理 ～ クラド二図形の研究の歴史 ～

桂田 祐史

明治大学 現象数理学科

2015 年 11 月 20 日

- PC使用 認めます (音は出さないように)
- インターネット使用 認めます
- 写真撮影 認めます  
(もともと、このスライドの大部分は  
<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/gairon2015/>  
に載せます。)

- 明治大学 総合数理学部 現象数理学科
- 専門: 微分方程式の**数値計算法の数理**の研究 (つまり数学者)
- 目標: 新しい優れた数値計算法を提案すること (これ自体は必ずしも数学ではないかもしれない)
- 私の主張: 計算して始めて分ることが多い。もっと計算を!

# ちょっと脱線: 数学とコンピューターの関係

注意: 数学とコンピューターの関係は少し前まで案外 “微妙” だった。  
10 年以上前の講演になるけれど

「コンピューターは数学の望遠鏡」

日本数学会 市民講演会

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/shiminkouen/>

# ちょっと脱線: 数学とコンピューターの関係

注意: 数学とコンピューターの関係は少し前まで案外 “微妙” だった。  
10 年以上前の講演になるけれど

「コンピューターは数学の望遠鏡」

日本数学会 市民講演会

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/shiminkouen/>

コンピューターに懐疑的な数学者もいるけれど、数学に取っては役に立つ道具なんだ、という主張。

- クラドニ図形という「振動現象」の研究の歴史を紹介する古い問題だけれど、まだ研究すべきことが残っている「現象数理学」や数値計算の必要性を説明するのに良い題材

このスライドは

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/gairon2015/>

に載せてあります。

# まずは見てみましょう (百聞は一見に如かず)

## 実験

- 下敷き (とカッター)
- 砂
- スピーカー (少し特別: 周波数を指定して音を出す)

を使って

→桂田研院生 遠藤小欽<sup>1</sup>の実験<sup>2</sup>(2014)

---

<sup>1</sup>先端数理科学研究科 M2

<sup>2</sup>実験指導 末松信彦 専任講師

# まずは見てみましょう (百聞は一見に如かず)

## 実験

- 下敷き (とカッター)
- 砂
- スピーカー (少し特別: 周波数を指定して音を出す)

を使って

→桂田研院生 遠藤小欽<sup>1</sup>の実験<sup>2</sup>(2014)

## もっと見たければ…

YouTube 等でキーワード

「クラドニ」, 「Chladni」, 「金沢健一」

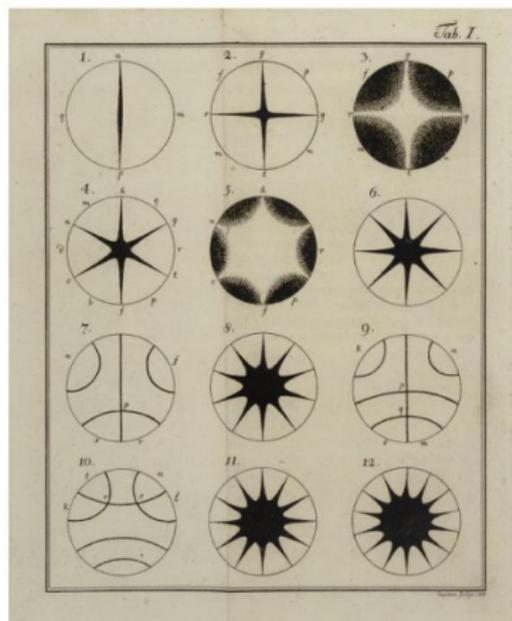
---

<sup>1</sup>先端数理科学研究科 M2

<sup>2</sup>実験指導 末松信彦 専任講師

# 発見した人: エルンスト・クラドニ (ドイツ, 1756–1827)

- 物理学者 & 音楽家
- 「音響学の父」、「振動理論の元祖」 (他に隕石宇宙由来説で有名)



# クラドニのしたこと

板 (金属, ガラス, ...) をバイオリンの弓でこすって “励起させる” とき、どこをこするかで異なるピッチ (音高) の音を出せる。そこに砂をまくと各ピッチで美しいパターンが出現することを発見した。

かなり似ている → 美術作家金沢健一氏のパフォーマンス

## 著作

- Entdeckungen über die Theorie des Klanges (「音の理論に関する発見」, 1787)
- Die Akustik (音響学, 1802)
- Neue Beyträge zur Akustik (音響理論に関する新しい寄稿, 1817)

に多数のスケッチを掲載 (系統的な実験の成果)

- パターンを二つのインデックスで表す “クラドニの記号”  $m|n$  提案
- 音高も測定・記録し、“クラドニの法則” と呼ばれることになった経験則を提示

# なぜ模様ができる？

# なぜ模様が出来る？

実は、板には振動しているところと振動していないところがある。

# なぜ模様が出来る？

実は、板には振動しているところと振動していないところがある。

砂は振動しているところから振動していないところに集まる。  
振動しているところに来た砂は跳ねてよそに行き、  
振動していないところに来るとそこに落ち着く。

# なぜ模様が出来る？

実は、板には振動しているところと振動していないところがある。

砂は振動しているところから振動していないところに集まる。  
振動しているところに来た砂は跳ねてよそに行き、  
振動していないところに来るとそこに落ち着く。



振動していないところ(ふし<sup>ふし</sup>と呼ばれる)が浮かび上がる

# なぜ模様が出来る？

実は、板には振動しているところと振動していないところがある。

砂は振動しているところから振動していないところに集まる。  
振動しているところに来た砂は跳ねてよそに行き、  
振動していないところに来るとそこに落ち着く。



振動していないところ (節<sup>ふし</sup>と呼ばれる) が浮かび上がる

**残る問題: 板はどのように振動するのか？**

(節はどこにあるのか？)

ある意味で当たり前過ぎる問題

# 板はどのように振動するのか？ — モデルを求めて

クラドニの 1808 年のパリ訪問を機会に

弾性体で出来た曲面の振動理論をつくり、実験的事実とどこまで合致するか示せ

というテーマで懸賞論文のコンテスト

# 板はどのように振動するのか？ — モデルを求めて

クラドニの 1808 年のパリ訪問を機会に

弾性体で出来た曲面の振動理論をつくり、実験的事実とどこまで合致するか示せ

というテーマで懸賞論文のコンテスト

整数論の研究でも有名な、ソフィ・ジェルマン (1776–1831) が論文を提出 (1811, 1813, 1815)

→ 弾性板の振動の “**微分方程式**” を導いた



**ジェルマン - キルヒホッフ** (1850) - **ラブ** のモデル

メインの方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -D \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)$$

$u = u(x, y, t)$  は板の点  $(x, y)$  の時刻  $t$  における変位を表す。

→ 膜の振動方程式である **波動方程式とは違う**

# これで解決？ — 数学でチャレンジ —

# これで解決？ — 数学でチャレンジ —

実はこの方程式を解くのはむつかしい。

## これで解決？ — 数学でチャレンジ —

実はこの方程式を解くのはむつかしい。

ちょうどその頃に発見された素晴らしい「**フーリエの方法**」で

**半分くらい解けた**

実はこの方程式を解くのはむつかしい。

ちょうどその頃に発見された素晴らしい「**フーリエの方法**」で

**半分くらい解けた**

## フーリエの方法の要点

- ① (後で説明する) 「**固有振動**」の和の形に表せる
- ② 固有振動を求める方程式が作れる

実はこの方程式を解くのはむつかしい。

ちょうどその頃に発見された素晴らしい「**フーリエの方法**」で

**半分くらい解けた**

## フーリエの方法の要点

- ① (後で説明する) 「**固有振動**」の和の形に表せる
- ② 固有振動を求める方程式が作れる ← **今回これが難しい**  
キルヒホッフは**円形板**の場合だけしか解けなかった  
(実は現在でもそれ以外の場合には解けない)

# これで解決？ — 数学でチャレンジ —

実はこの方程式を解くのはむつかしい。

ちょうどその頃に発見された素晴らしい「**フーリエの方法**」で

**半分くらい解けた**

## フーリエの方法の要点

- ① (後で説明する) 「**固有振動**」の和の形に表せる
- ② 固有振動を求める方程式が作れる ← **今回これが難しい**  
キルヒホッフは**円形板**の場合だけしか解けなかった  
(実は現在でもそれ以外の場合には解けない)

(細かい注: フーリエ自身は、振動現象ではない、熱伝導現象を解くためにフーリエの方法を編み出した。実は色々な微分方程式に応用できる。  
19世紀の奇跡的な発見。)

20世紀に入って (懸賞論文コンテストの約100年後に)

ヴァルター・リッツ (1878–1909) が「**リッツの方法**」と呼ばれる素晴らしい**数値計算法**を開発し、**正方形板**の場合に手計算で解いてみせた (1909年)。



B. Lösungen, die in  $x$  und  $y$  ungerade und antisymmetrisch sind.

$$I. \lambda = 316,1 - 270 \delta \mu.$$

$$w = u_1 v_3 - v_1 u_3 + 0,0002 (u_1 v_5 - v_1 u_5) \\ + 0,0033 (u_3 v_5 - v_3 u_5).$$

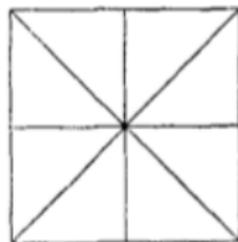


Fig. 7.

クラシックな問題ではあるけれど、現象数理学の三本柱がはっきり見える問題

- ① **モデリング** (現象を表す式を作る)
- ② **アナリシス** (数学を用いてモデルを調べる)
- ③ **シミュレーション** (コンピューターの数値計算でモデルを調べる)

クラシックな問題ではあるけれど、現象数理学の三本柱がはっきり見える問題

- ① **モデリング** (現象を表す式を作る)
- ② **アナリシス** (数学を用いてモデルを調べる)
- ③ **シミュレーション** (コンピューターの数値計算でモデルを調べる)

本論に戻って

# 固有振動とは？

(ひとりごと: フーリエの方法抜きに理解するのは難しい…)

# 固有振動とは？

(ひとりごと: フーリエの方法抜きに理解するのは難しい…)

物体を振動させるとき、特定の周期で (言い換えると特定の振動数で) 良く振動する。その振動のことを**固有振動** (normal mode of vibration) と呼ぶ。

その周期、振動数をそれぞれ**固有周期**、**固有振動数**と呼ぶ。

## 例 1: 振り子の場合

振り子は、重りを強制的に手をつかんで動かしたりもしない限り、ある特定の周期で振れる。

強く揺らしても、振幅が大きくなるだけで、周期は(ほとんど)変わらない(ガリレオ, **振り子の等時性** — 振り子時計の原理でもある。)

## 例 1: 振り子の場合

振り子は、重りを強制的に手をつかんで動かしたりもしない限り、ある特定の周期で振れる。

強く揺らしても、振幅が大きくなるだけで、周期は(ほとんど)変わらない(ガリレオ, **振り子の等時性** — 振り子時計の原理でもある。)

(物理を学んだ人のために) 振り子の周期  $T$  は

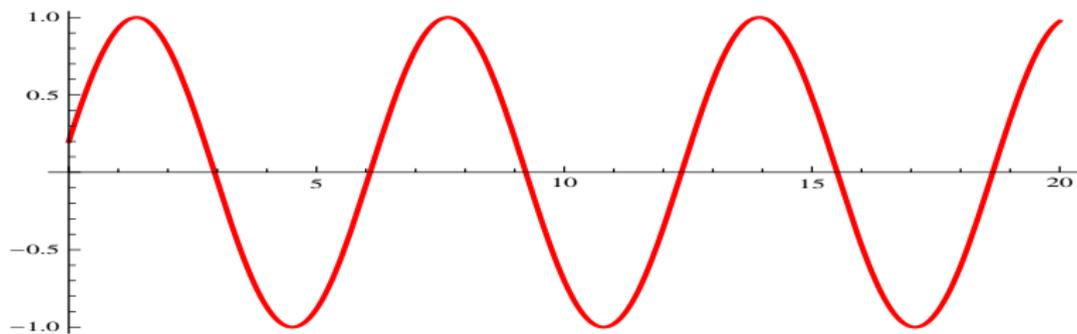
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

( $g = 9.8 [\text{ms}^{-2}]$  (重力加速度),  $\ell$  はヒモの長さ)

(ただし振幅はあまり大きくないとする。)

# 例 1: 振り子の場合 (続き)

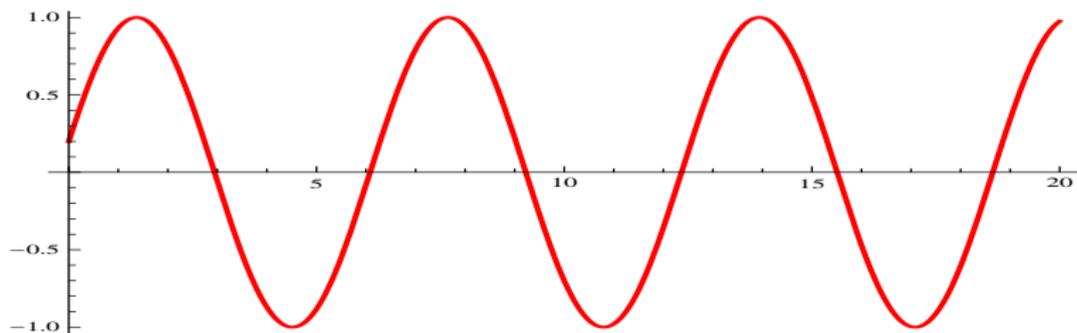
振り子の振れの角度  $\theta$  の時間変化は



これは実は**サイン・カーブ**である。

# 例 1: 振り子の場合 (続き)

振り子の振れの角度  $\theta$  の時間変化は



これは実は**サイン・カーブ**である。  
つまり

$$\theta = A \sin(\omega t + \phi), \quad \omega := \frac{2\pi}{T} \quad (\text{いわゆる**単振動**の式}).$$

揺らし方によって、振幅  $A$ , 位相  $\phi$  は変わっても、周期  $T$  は (従って  $\omega$  も) 一定で、振動を表す式の形はつねにこれである。

## 例 2: 弦の場合

(ギター, ヴァイオリン, ピアノ, …などを思い浮かべて下さい。)

弦の振動問題は、**フーリエの方法**で完全に解ける。  
ここでは結論だけ紹介する。

## 例 2: 弦の場合

(ギター, ヴァイオリン, ピアノ, …などを思い浮かべて下さい。)

弦の振動問題は、**フーリエの方法**で完全に解ける。  
ここでは結論だけ紹介する。

固有振動は無限にたくさんある, その和で一般の解が得られる。

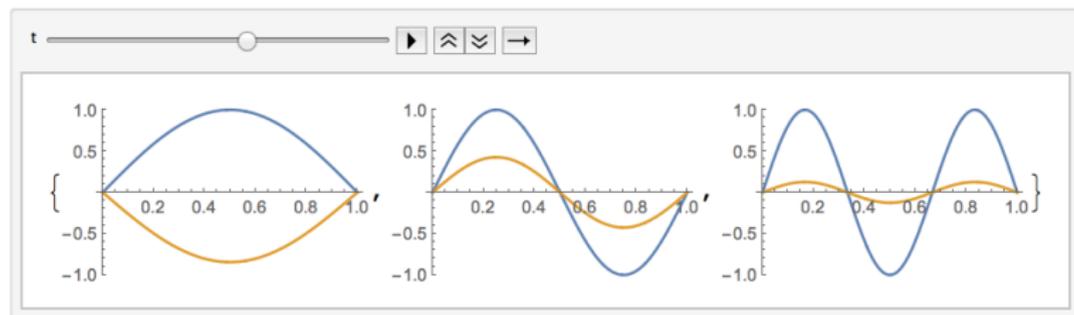
## 例 2: 弦の場合

(ギター, ヴァイオリン, ピアノ, …などを思い浮かべて下さい。)

弦の振動問題は、**フーリエの方法**で完全に解ける。  
ここでは結論だけ紹介する。

固有振動は無限にたくさんある, その和で一般の解が得られる。  
ちょっとプログラムで弦の固有振動をシミュレーション…

## 例 2: 弦の場合



青線は関数のグラフに表せる。

$$A_1(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{L}, \quad A_2(x) = a_2 \sin \frac{2\pi x}{L}, \quad A_3(x) = a_3 \sin \frac{3\pi x}{L}, \dots$$

動いている赤線は?

$$\begin{aligned} u_n &= A_n(x) \sin(\omega_n t + \phi_n) & (\omega_n &:= \frac{n\pi c}{L}) \\ &= a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \left( \frac{n\pi c}{L} t + \phi_n \right). \end{aligned}$$

これが弦の固有振動を表す式である。(周波数は  $n$  倍。)

## 例 2: 弦の場合 (続き)

弦の一般の振動を表す式は

$$\begin{aligned} u &= A_1(x) \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2(x) \sin(\omega_2 t + \phi_2) + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \sin(\omega_n t + \phi_n), \end{aligned}$$

$$A_n(x) = a_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

## 例 2: 弦の場合 (続き)

弦の一般の振動を表す式は

$$\begin{aligned}u &= A_1(x) \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2(x) \sin(\omega_2 t + \phi_2) + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \sin(\omega_n t + \phi_n),\end{aligned}$$

$$A_n(x) = a_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

一見複雑だけど、要するに

### 固有振動の和

実は、非常に多くの振動現象 (膜, 棒, 板; 空気, ...) で同じ形の式

一般解 = 固有振動の和

が成り立つ。違うのは  $A_n(\cdot)$  と  $\omega_n$  の部分のみ。

物体は固有周期に近い周期で力を加えられると大きく振動する。

この現象を共振, 共鳴と呼ぶ。

建物など製造物は共振を起こしにくいように作る。

クラドニ図形は、共振による固有振動の節であると考えられる。

▶ タコマ橋の崩壊

▶ 長周期地震動

物体は固有周期に近い周期で力を加えられると大きく振動する。  
この現象を共振, 共鳴と呼ぶ。

建物など製造物は共振を起こしにくいように作る。

クラドニ図形は、共振による固有振動の節であると考えられる。

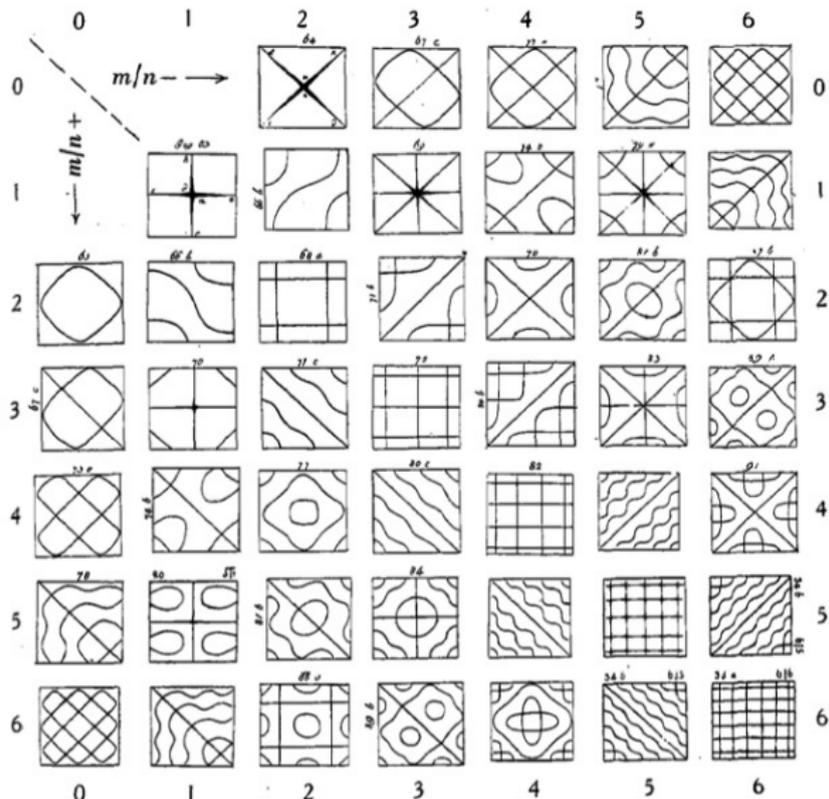
▶ タコマ橋の崩壊

▶ 長周期地震動

この辺で最初の問題に戻る。

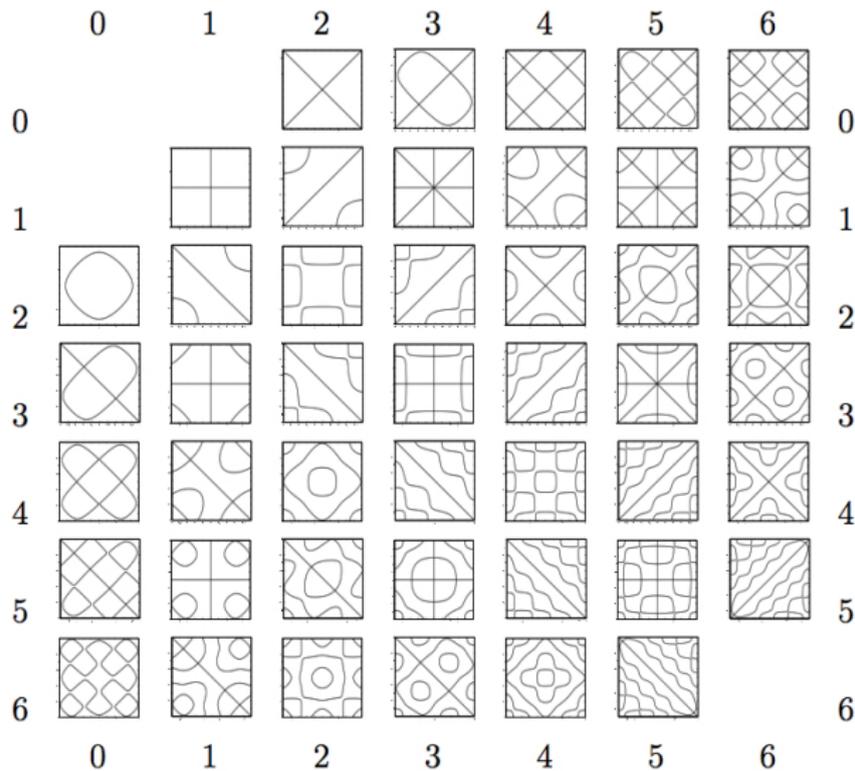
# 懸賞論文の課題は解決したのか？

クラドニによる正方形板の場合のスケッチ (並べ方はウォーラー [1])



# 懸賞論文の課題は解決したのか？ (続き)

モデルの数値計算結果 (桂田研 小釜燈台)



# スケッチとモデルの数値計算

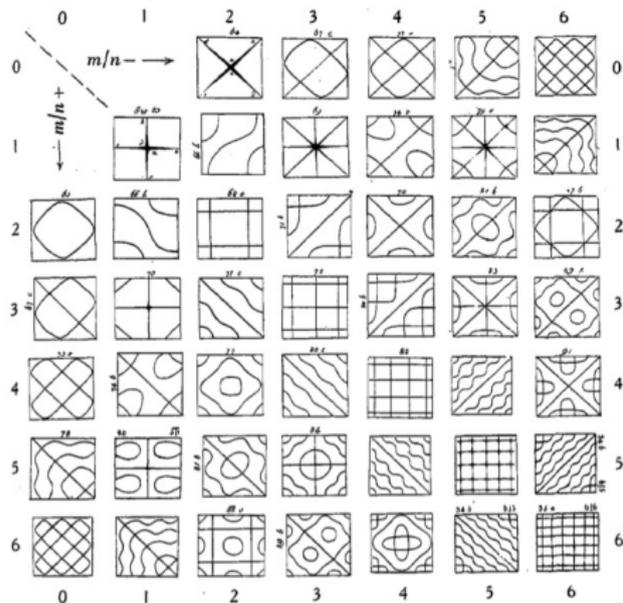
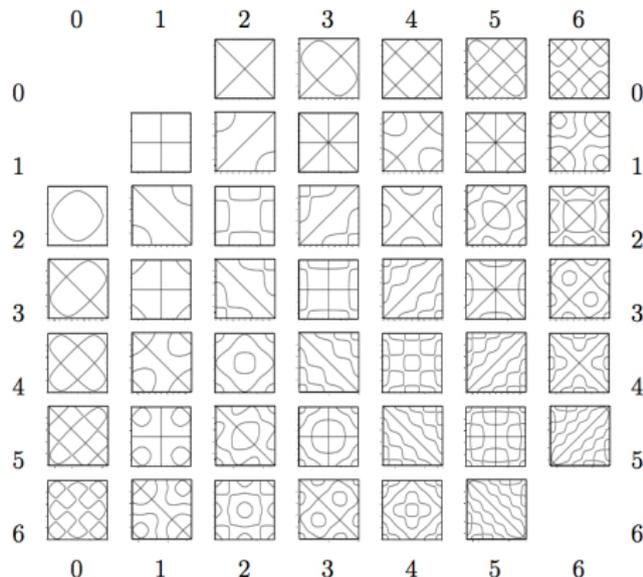


Plate 3. Selection of Chladni's drawings arranged as in plate 2, see § 5.



かなり良くあっている。近代の実験結果と比べるとさらに良く適合する。

# どういう形をしているのか？ (正方形の板の場合)

リッツとウォーラーは正方形板のクラドニ図形のパターンを分類した。

クラス	$m = n$ か？	$m, n$ の偶奇性	対称性	ウォーラーの記号
1	$m = n$	ともに奇数	$D_4$	+
2	$m = n$	ともに偶数	$D_4$	○
3	$m > n$	ともに奇数	$D_4$	※
4	$m > n$	ともに偶数	$D_4$	×
5	$m > n$	ともに奇数	$D_4$	+
6	$m > n$	ともに偶数	$D_4$	○
7	$m > n$	偶数と奇数	$D_2$	/

ここで  $D_n$  は二面体群 (正  $n$  角形の合同変換群, ウィキペディア参照).  
 $D_4$  は  $90^\circ$  の回転対称性を持つが、 $D_2$  は  $180^\circ$  の回転対称性のみ。

# どういう形をしているのか？ (正方形の板の場合)

リッツとウォーラーは正方形板のクラドニ図形のパターンを分類した。

クラス	$m = n$ か？	$m, n$ の偶奇性	対称性	ウォーラーの記号
1	$m = n$	ともに奇数	$D_4$	+
2	$m = n$	ともに偶数	$D_4$	○
3	$m > n$	ともに奇数	$D_4$	※
4	$m > n$	ともに偶数	$D_4$	×
5	$m > n$	ともに奇数	$D_4$	+
6	$m > n$	ともに偶数	$D_4$	○
7	$m > n$	偶数と奇数	$D_2$	/

ここで  $D_n$  は二面体群 (正  $n$  角形の合同変換群, ウィキペディア参照).  
 $D_4$  は  $90^\circ$  の回転対称性を持つが、 $D_2$  は  $180^\circ$  の回転対称性のみ。

これは実験してみたら、数値計算してみたらこうなった、というだけで、  
数学的な証明は出来ていない。

## ウォーラー (Mary Désirée Waller, 1886–1959, 実験物理学者)

- 色々な材質・形の板で綿密な実験を行ない、多くの写真を撮影
- クラドニの著書の周波数、節線パターンをすべて追試
- 板の形の対称性と節線パターンの対称性の関係を調べる
- 正方形で、膜の場合の理論的計算と板の場合の実験結果を比較した
- 著書 Chladni Figures — study in symmetry (1961) や論文に載った実験は計算結果との照合に便利 (実は大変貴重)

## どういう形をしているのか？ (正多角形の板)

正方形でない場合、オリジナルのリッツの方法は使いにくいですが、リッツの方法のコンピューター版である**有限要素法**を使って数値計算できる。

法則が発見できた？ 日本応用数理学会で遠藤小欽さん (先端数理科学研究科 M2) が報告 (遠藤 [5], 2015/9/9)。

証明を目指している。

# 世界は振動現象であふれている

振動 (oscillation, vibration) とは、何かが限られた範囲をほぼ一定の周期で揺れ動くこと

- 振り子
- 叩いたり、揺すったりして起こるものの振動 (微小なもの～巨大な建造物～)
- 音 (空気の振動; 楽器, 声帯, ...)
- 地震 (大地の振動)
- 電気回路などの振動
- 電磁波 (電波、赤外線、光、紫外線、X線、ガンマ線)

以上は物理学の守備範囲であるが、生命現象、科学現象、社会現象など様々なところに出現

- 振動・波動現象の多くに共通の法則がある
- 特徴的な振動 (固有振動) があり、その時間変化は「単振動」である
- すべての振動は固有振動の和で表現できる
- 個々の問題の固有振動を求めることは難しい場合もあって、コンピュータの力が必要
- 100年ほど前のリッツが発見した方法の現代版「有限要素法」が今でも有力
- 板の固有振動については、膜の場合ほど分っていないくて、今でも研究課題

- 振動・波動現象の多くに共通の法則がある
- 特徴的な振動 (固有振動) があり、その時間変化は「単振動」である
- すべての振動は固有振動の和で表現できる
- 個々の問題の固有振動を求めることは難しい場合もあって、コンピュータの力が必要
- 100年ほど前のリッツが発見した方法の現代版「有限要素法」が今でも有力
- 板の固有振動については、膜の場合ほど分っていないくて、今でも研究課題

以上です。

-  Mary D. Waller, Vibrations of free square plates: part I. normal vibrating modes, Physical Society, Vol. 51 (1939), pp. 831–844.
-  Mary D. Waller, Chladni figures — a study in symmetry, G. Bell (1961).
-  von Walter Ritz, Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern, Annalen der Physik Volume 333, Issue 4, pp. 737–786 (1909).
-  平野裕輝, 正方形領域における重調和作用素の固有値問題 — 差分法によるクラドニ図形の解析 —, 明治大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻修士論文, 2012年3月.
-  <sup>しゃおちん</sup>遠藤小欽, 桂田祐史, 末松信彦, 正多角形板の Chladni 図形の対称性, 2015年度日本応用数学会年会 ポスター発表, 2015年9月9日, 金沢大学角間キャンパス.

## 余談: タコマ橋 (the Tacoma Narrows Bridge) の崩壊

1940年11月7日、アメリカのワシントン州のタコマ海峡で、建設したばかりの吊橋が、風速 19 m の風で激しく揺れて、崩壊してしまった。

画像はウィキペディアから。ネットには動画もある。

風が吹くことで橋の周りに渦ができて、その渦からの周期的な力とタコマ橋のねじれ振動が共振を起こしてしまったため、と言われている。

2～20 秒程度の長い周期で揺れる地震動を長周期地震動という。

建物の固有周期は、建物が高いほど長い。近年建築されるようになった高層ビルは、長周期地震動で激しい共振を引き起こし、倒壊のおそれがあることが分かってきた。

低い建物しかなかった頃は、長周期地震動は問題とされず、高い建物は柔構造で作れば安全であると考えられた。

クラドニ図形を実際に見た時、非常に驚いた。まるで砂が生きているかのように動くのだ。そこで、私はクラドニ図形というものに興味を持ち、どのような時に、どのようなパターンが出るのかを理解したいと思った。