2024年度　卒業論文

# 古代エジプト数学について

明治大学　総合数理学部　現象数理学科

学籍番号 2610210085

氏名 佐々木菜摘

目次

# 第 1 章 序論

## 1-1 研究の背景

卒業研究を行うにあたって、桂田祐史先生から助言をいただき、数学史をテーマにすることにした。数学史をテーマに選んだ理由として、来年度から数学の教員になるため、授業内で活用できる知識を深めたいと考えたからである。『数学入門(上)(著者：遠山啓)』を桂田先生からお借りし、読み進めている中で、古代エジプトの数字の表し方から、詳しくは後述するが古代どのように計算されていたのかなどを理解していくうちにエジプト数学に興味を持ち、今回研究テーマに古代エジプトを選択した。

## 1-2 目的

その中で、今回はこの卒業研究の場を借りてエジプト数学の大まかな歴史から、古代エジプト数学の四則演算について触れ、古代エジプトにおける各種の計算の基本的なアルゴリズムを、プログラムとして実現することを目標・目的とする。また、古代エジプトの数学がどのようなものであったかを全体的に説明し、古代エジプト人がどのような問題を解くことができていたのかを明らかにする。

## 1-3 本論文の構成について

本稿の流れについて説明する。まず第 2 章で古代エジプト数学の歴史や使われている数学の基本的な知識などを説明する。次に第 3 章で、古代エジプト数学での四則演算について説明し、第 4 章で古代エジプト数学ではどのような問題が解かれていたのかを明らかにし、考察してまとめる。

# 第 2 章 古代エジプト数学の歴史

## 2-1 古代エジプト数学の総評

古代エジプト数学では、

『1. 明確な十進法.しかし，今日の記数法のように，非常に簡単にできる位取りの工夫はなかった.

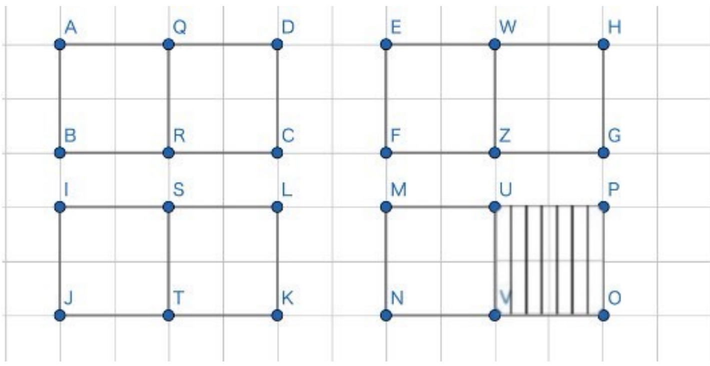
2. 運算の四則としての足し算，引き算，掛け算，割り算の完全な理解.』(参考文献[1]p.3 より引用)ができていたと言われている。これを詳しく本稿で見ていく。加えて、単位分数と整数で表した四則演算を用いて面積や体積の計算、一次方程式・2 個の未知数がある際の解を求める計算(連立方程式は使用しない)などが計算できている。これらはアーメス・パピルスという古代エジプト数学の文献に問題と途中式が簡単に書かれているため計算方法などもわかる。また、ベルリン・パピルス 6619 という文献には、ピタゴラスの定理のような問題があり、未知数の二次方程式に関する簡単な解法が示されているが、ここでは主にアーメス・パピルスを深く理解していくため、省略する。他の古代エジプト数学の各文献については、2-3 にて述べる。

世界規模で見た数学の特質を研究しているジョージ・G・ジョーゼフが書いた『非ヨーロッパ起源の数学-もう一つの数学史-』(参考文献[8]）にて、『アーメス・パピルスと同年代頃と推定される革の巻物に書かれた文献(略)を最初に翻訳した S.R.クランヴィーユのコメントは、巻物が当時の革をなめす技術を示すのに一役買ったことでそれなりの価値はあったのだ、という半ばやけっぱち気味のものだった。だが、よく調べてみるとこの革の巻物の内容はそんな期待はずれのものではなく、アーメス・パピルスの中で行われている計算の多くを明確にするのに役立つことがわかったのである。』 (p.101)と述べられている。しかし、古代数学に関する文献である『古代の精密科学』(O.ノイゲバウアー)(参考文献[7])では、ノイゲバウアーはエジプト数学の天文学的側面に期待していたが、その内容は主に実務的な計算に偏っていたため、彼の評価はそれほど高くなかったことが書かれている。その原因については、エジプト数学で利用されている単位分数(分子が 1 である分数)が挙げられると個人的には考えている。エジプト式数学では、単位分数以外の任意の分数を単位分数の和に表して計算を行う。そのため、アーメス・パピルスの最初には、$\frac{2}{(\text{奇数})}$を単位分数の足し算に分解している計算が述べられている分母が 3 から 101 までの$\frac{2}{(\text{奇数})}$が単位分数の和に分解され表にまとめられており、古代エジプト人はその表を用いて、奇数分数の二倍が現れるたびに分解して計算が行われていた。ただ、$\frac{2}{3}$のみは特別扱いされており、$\frac{2}{3}$は分解せずにそのまま用いられている。例えば、$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$といったように分解する。加えて、$\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$と表すことは避けられ、異なる単位分数の和として表現されることが好まれた。全ての 2-2 で後述

するが、この単位分数の和への分解方法も任意の分数の分母によって異なると解析されている(当時のエジプト人たちは、任意の分数の単位分数への分解を一覧の表にまとめていた)ため、エジプト数学は当時も他の地域ではあまり利用されていなかった。ヨーロッパでは、17 世紀頃までエジプト式分数が用いられていたと言われているが、実用的な計算には向いていないため、エジプト式数学に固執したからこそ数学の発展を遅らせたとまで言う歴史家もいるほどだ。任意の分数を単位分数の和に表すアルゴリズムをレオナルド=フィボナッチが『算盤の書』にて 1202 年に発表している。ただ、アルゴリズムによっては複雑な展開になることもある。

## 2-2 パンの切り方

単位分数がエジプトでよく使用されていた理由として、労働の報酬の分け方がひとつ挙げられる。ここからは David Reimer [1]を参考にして説明していく。古代エジプトでは、貨幣制度労働の報酬はパンや酒であり、また歩合制であった。給料は書く働き手に分けていくが、仕事の内容に異なり、かつ貨幣ではなく食物で分配するため、1 本のパンを 7 人で分配することもあり、その際一人分は$\frac{1}{7}$となる。このように、一人分を表現する際に分数が必要不可欠となった。実際はパンになる前の穀物を分けていたとされているが、今回は出来上がったパンを分けることにする。先述したときのように、1 本のパンを分ける場合は簡単であるが、今度は 4 本のパン(図 1 の四角形 ABCD,EFGH,IJKL,MNOP をそれぞれパン 1 本とする)を 7 人で分けるとする。すべてのパンを 7 等分にして 1 人 4 切れ配るのもいいが、その場合細いパンばかり配られ、労働者はいい顔をしなかったのであろう。そこで分配方法を工夫した。すべてのパンを半分に切ると 8 切れになるため、その 1 切れ、すなわち$\frac{1}{2}$切れを配布し、残った$\frac{1}{2}$切れを再度$\frac{1}{7}$等分(図 1 の四角形 UVOP の部分)、つまり元のパンの$\frac{1}{14}$を配布した。つまり、$\frac{4}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$といった形で分解し分配している。

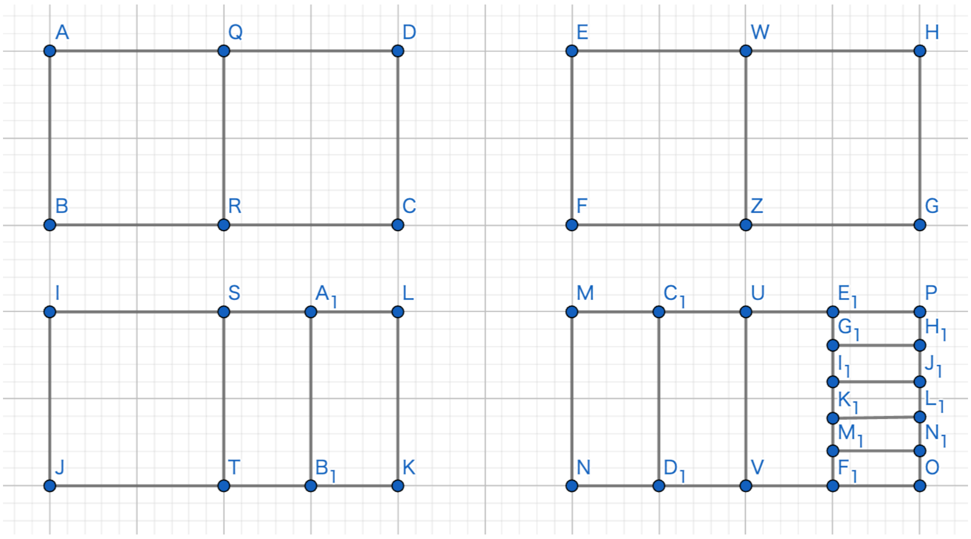



【図 1】4 本のパンを 7 人で分配する時の図

このような分配が頻繁に行われていたため、エジプト式数学では単位分数以外の任意の分数を単位分数の和に表して計算を行っていた。

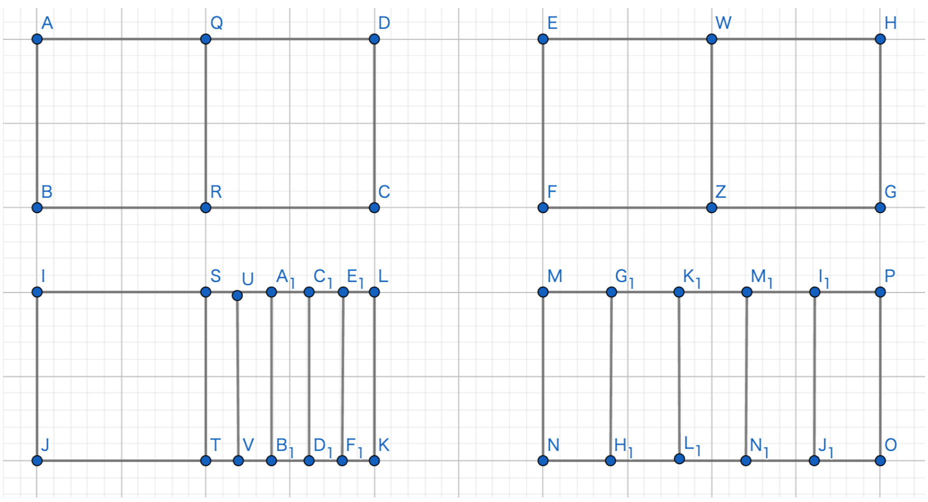
ただ、任意の分数を単位分数の和で表すとなると答えが一つに定まるわけではない。例え

ば、4本のパンを5人で分配する時、先ほど同様にまずはすべて半分にして1切れずつ5人に配ると$\frac{1}{2}$の切れ端が3本残ることになる。その$\frac{1}{2}$の3切れをさらに半分にして出来た$\frac{1}{2}*\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$の6切れの5つを分配する。最後に残った$\frac{1}{4}$の1切れを5等分($\frac{1}{4}*\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$)すると、各働き手に平等に分配できる。つまり、$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$と表せる。これが一つ目の解法となる。




【図2】4本のパンを5人で分配する時の方法①

ただ、もともとの4切れすべてを半分にする必要はなかった。4切れ中3切れのみを半分にし、余った1切れと$\frac{1}{2}$の1切れをそれぞれ5等分すれば良い。すなわち一人分は、$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}*\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}$となる。一つの問題から異なる二つの答えがあることがわかったが、同時に$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$と$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}$が等しいこともわかる。どちらの答えが優れているかは古代エジプト人の考えで言うと、一人分のパンが$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}$のほうがそれぞれの1切れが大きくなり良い分配と言えると考えられる。




【図3】4本のパンを5人で分配する時の方法②

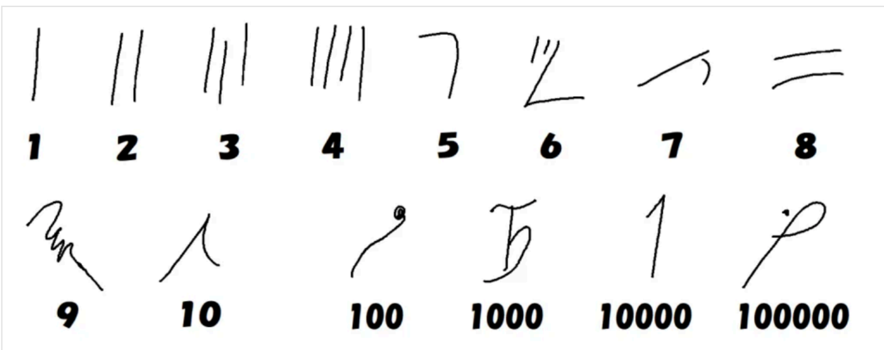
## 2-3 ヒエログリフ・ヒエラティックについて

エジプトで使用されていた数学文書の説明に入る前に、文書で使用されているエジプト文字について触れる。エジプトでは、象形文字＝神聖文字（ヒエログリフ）が用いられていた。それが後に官邸初期によって簡略化され神官文字（ヒエラティック）になる。その後どんどん簡略化され、今使用されている算用数字へと繋がる。

ヒエログリフでは以下のように、数字は 1~9 を表す図があり、それを表したい数の個数分並べることで数字を表す。例えば、∩という文字は、10 を示し、｜は 1 を示すため、以下の画像は 37 を表す。

（宮川・吉野・永井[10]より）

ヒエラティックでは、全体的にヒエログリフを簡略化しているもののため、下図のようになり、数自体の表し方はヒエログリフと差異はない。ただし、ヒエラティックでは 1〜9 を表す個別の記号が導入されたため、ヒエログリフと比べると記述の簡略化が進んでいる。ヒエログリフでは各桁を表すために 1、10、100 などに相当する記号をその数だけ並べる必要があったが、ヒエラティックでは 1〜9 を表す記号が直接使われるため、1 の位の表記はよりコンパクトになった。




＜図12＞　ヒエラティックの数字

（ Fukusuke[9]より）

おおよそ全て 10 を底とされているが、「0」（零記号）がないため、十進法ではなく、十進記数法といわれている。

## 2-4 エジプト数学に関する文献

古代エジプト当時の数学に関する文献は数少なく、有名な物でいうと「アーメス・パピルス（リンド・パピルス)」が挙げられる。そのほかにも、前述した革の巻物に書かれた文献、モスクワ・パピルス、ベルリン・パピルス、レイズナー・パピルスなどがある。

アーメス・パピルスとは、紀元前 1650 年頃に書記のアーメスが算術や代数などの数学の知識を記録して残した物である。このアーメス・パピルスを、1853 年にイギリスの収集家であるヘンリー・リンドが発見し、大英博物館へ寄贈したためリンド・パピルスと呼ばれることもある、と参考文献[11]にて述べられている。今回は、このアーメス・パピルスを中心にエジプト数学について理解を深めていく。加藤[15]によると、アーメス・パピルスの内容は四部構成になっており、①分子が 2 である分数の単位分数への分解、②割り算と引き算の例題、③簡単な方程式の解法、④幾何の問題であった。アーメスには、87 題の問題が書かれておりそれぞれ問題と簡単な解法と途中計算が書かれており、有理数(整数と単位分数のみで表す)の四則演算ができることや、中には仮定法を用いて連立方程式のような問題(未知数が 2 個ある問題)も解けることがわかる。

ここで Reimer[1]によると、パピルスとは、植物の茎の繊維を縦横に並べて乾燥させて作った紙である。植物から作るという点では現在使用されている紙と同じだが、紙は植物の繊維を細かく切って絡ませたものを薄くすいて作るが、パピルスは繊維をそのまま並べて作る部分が異なる。メソポタミアなどで用いられた硬い粘土板よりパピルスは長期保管には向いていなかったため、前述した数学に関する文献は解読できていない、または虫食いだらけであった。また、文献の多くは主にパピルスが用いられているが、前述した「革の巻物に書かれた文献」のみ、革に記されている。これは、「エジプト数学革巻き」とも言われており、こちらもヘンリー・リンドが 1864 年に入手している。アーメス・パピルスと同年代のもので、革製のものにヒエラティックで書かれている。アーメス・パピルスの内容の理解を助ける内容で、エジプト式分数の単位分数の分解式が 26 個書かれていた。

参考文献[13]によるとモスクワ・パピルスとは、エジプト学者のウラジーミル・セミョーノヴィチ・ゴレニシチェフが 1893 年にエジプトからロシアに持ち帰った数学文書であり、ゴレニシチェフ数学パピルスとも呼ばれる。これはヒエラティックで 25 問の数学の問題が書かれたものであり、モスクワ・パピルスのほうがアーメス・パピルスよりも古いものであるとされている。第 10 問では、半球の表面積を問う問題があり、曲面の面積の近似値を求める問題として最も古い問題の一つと言える。他にも、第 14 問では切頭体の体積を求める問題が載っており、計算問題だけでなく図形問題も取り扱っていたことがわかっている。

参考文献[12]によるとベルリン・パピルスとは、紀元前 1300 年頃のもので、ベルリン・エジプト博物館に所蔵されているパピルスのことを指す。ベルリン・パピルスの中にはいろいろなものが含まれており、ベルリン・パピルス 3033（別名ウェストカー・パピルス）では、物語になっており、ギザの大ピラミッドを建築したことで知られるクフ王が主人公で、クフ王が 9 人の息子たち一人一人から物語を聞くものとなっている。物語の内容自体に数

学は関係なく、魔法を用いて池の底に落ちた耳飾りを取り戻すものであったり、王権についてだったりする。他にも、医学について語られるベルリン・パピルス 3038 があり、数学について書かれているのはベルリン・パピルス 6619 という。ベルリン・パピルス 6619 には二つの数学の問題があり、その内一つがピタゴラスの定理を古代エジプト人が知っていたと思われる問題がある。その問題とは、「面積が 100 の正方形は二つの小さな正方形の面積に等しい。一方の辺は他方の辺の$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$である」というものである。これについて、パピルスには未知数の二次方程式に対する簡単な解法が示されているだけであった。

参考文献[14]によるとレイズナー・パピルスとは、ジョージ・アンドリュー・レイスナーによって 1901 年にエド・ディルという遺跡を発掘中に 4 つのパピルス巻物が木製の棺の中で発見された。4 つの中には、神殿などの建設記録や行政命令、人事記録などが記載されていた。数学的な内容としては、建設に関わるものが多く、面積や体積に加え、その日に必要な労働者数なども計算している。その計算の中で、分数の商や余りの概念を理解していることが読み取れた。例えば、$\frac{64}{10}=6+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}$と言った形に、単位分数の和で細かく表している。この場合、6 が商となり他の分数が余りとされる。

### 2-5 バビロニアについて

エジプト文明が発展している中、チグリス・ユーフラテス川付近で高度な文明が存在した。シュメール人が生み出したメソポタミア文明をバビロニアと呼ぶ。ここでは、象形文字が楔形文字に変化した。(粘土版に先が尖ったもので描いたためと思われる。) ここで零記号ができ、10 と 60 を底としている。

# 第 3 章 エジプト数学での四則演算

乗法、除法、加法、減法の順で解説していく。この順にした理由としては、加法で乗法を用いて計算する部分があるため、先に乗法・除法を述べている。

## 3-1 乗法

乗法は乗数として 2 か 10 しか用いられないこと以外のやり方は大まか現代と似ている。以下に方法を示し、具体的な例を後に載せる。また、コードでも実践できるようになっており、 5 章の付録に載せてあるがそれは整数×整数、整数×分数に分かれている。

### 3-1-1 乗数が整数の場合

・$a \times b$($a, b$は正の整数)

① 掛け算表の作成

・$x_n = 2^{n-1}, y_n = 2 \times y_{n-1}$として、$[x_n, y_n]$という$n \times 2$行列を掛け算表と呼び、$[x_1, y_1] = [1, b]$であり、 2 行目以降は$[x_n, y_n] = [2^{n-1}, 2 \times y_{n-1}]$で表す。　ただし$2^{n-1} \leq a$とする。

② 必要な行を選択

・掛け算表の中から、 1 列目、すなわち$x_n$の列の数値を足し合わせて$a$になるように必要な値を選択する。(選択した行にチェックマークがアーメス・パピルスには付けられていた。)

・選んだ値の行の 2 列目、すなわち選択した$x_n$に対応する$y_n$を足し合わせる。

③ 選択した行の 2 列目の数を加える

・選んだ行の 2 列目の合計、すなわち選択した$y_n$の合計が$a * b$の結果となる。

具体的に数値を用いて以下で説明する。例えば、$a = 5, b = 12$として$5 \times 12$を行うとする。まず、掛け算表の 1 行目は$[1, 12]$となり、それぞれ 2 倍していくが、1 列目が 5（$= a$）を超えないようにする。つまり図 4 にあるような掛け算表になる。掛け算表の作成後、1 列目の数字を加算して$5(= a)$になるよう選択、つまり今回は 1,4 が選択される。これらの数値の 2 列目の値を加算すると積となる。すなわち、今回の積は 60 となる。

```
a*bを行います。a,bは正の整数とします。

aとbを入力してください。
整数a: 5
整数b: 12

掛け算表を作成します。(b*2^(n-1)<=a)
掛け算表:
[1, 12]
[2, 24]
[4, 48]

上記の掛け算表で1列目の数字を加算し、aになるように選択します。
選択された行:
[4, 48] ✅
[1, 12] ✅

選択された行の2列目を加算したら積になります。
積: 5*12 = 48 + 12 = 60
```

【図４】5 × 12の計算

### 3-1-2 乗数が単位分数の場合

・$a \times b$($a$は正の整数、$b$は正の単位分数)

① 掛け算表の作成

・$x_n = 2^{n-1}, y_n = 2 \times y_{n-1}$として、$[x_n, y_n]$という$n \times 2$行列を掛け算表と呼び、$[x_1, y_1] = [1, b]$であり、２行目以降は$[x_n, y_n] = [2^{n-1}, 2 \times y_{n-1}]$で表す。　ただし$2^{n-1} \leq a$とする。

・また、$2 \times y_{k-1}$が$\frac{2}{奇数}$となった場合、$\frac{2}{奇数}$を分解するリスト（アーメス・パピルスの最初に記載があるが、付録にあるコードにも bunkaihyou という名前で最初に打ってある。）に基づいて単位分数の和に分解する。（ただし$\frac{2}{3}$のみ例外）

・$2 \times y_{k-1}$が$\frac{2}{偶数}$となった場合、約分する。

② 必要な行を選択

・掛け算表の中から、１列目、すなわち$x_n$の列の数値を足し合わせて$a$になるように必要な値を選択する。（選択した行にチェックマークがアーメス・パピルスには付けられていた。）

・選んだ値の行の２列目、すなわち選択した$x_n$に対応する$y_n$を足し合わせる。

③ 選択した行の２列目の数を加える

・選んだ行の２列目の合計、すなわち選択した$y_n$の合計が$a * b$の結果となる。

・和に分数が２項以上出た場合には、単位分数の和のまま表す。（ただし$\frac{2}{3}$のみ例外）

具体的に数値を用いて以下で説明する。例えば、$a=21, b=\frac{1}{22}$として$21\times\frac{1}{22}$を行うとする。まず、掛け算表の 1 行目は$[1,\ \frac{1}{22}]$となり、それぞれ 2 倍していくが、1 列目が 21 $(=a)$を超えないようにする。つまり図 5 にあるような掛け算表になる。$[4, \frac{2}{11}]$の列は$\frac{2}{奇数}$となっているため、$[4, \frac{1}{6}+\frac{1}{66}]$と bunkaihyou に則って分解されている。掛け算表の作成後、1 列目の数字を加算して$21(=a)$になるよう選択、つまり今回は 1,4,16 が選択される。これらの数値の 2 列目の値を加算すると積となる。すなわち、今回の積は羅列すると、$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{22}+\frac{1}{22}+\frac{1}{66}+\frac{1}{66}$となり（図 5 にある出力にはコードの精査が足りず分母が小さい順になっていない）整理すると、$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{33}$となる。

```
a*bを行います。aは正の整数、bは正の分数とします。

aとbを入力してください。
整数a: 21
分数b(例: 1/7): 1/22

掛け算表を作成します。(b*2^(n-1)<=a)
掛け算表:
[1, 1/22 = 1/22]
[2, 1/11 = 1/11]
[4, 2/11 = 1/6 + 1/66]
[8, 4/11 = 1/3 + 1/33]
[16, 8/11 = 2/3 + 1/22 + 1/66]

上記の掛け算表で1列目の数字を加算し、aになるように選択します。
選択された行:
[16, 8/11 = 2/3 + 1/22 + 1/66]✅
[4, 2/11 = 1/6 + 1/66]✅
[1, 1/22 = 1/22]✅

選択された行の2列目を加算したら積になります。
積: 21*1/22 = 2/3 + 1/22 + 1/66 + 1/6 + 1/66 + 1/22 = 2/3 + 1/11 + 1/33 + 1/6
```

【図 5】$21\times\frac{1}{22}$の計算

もし、$\frac{2}{3}$をまた 2 倍することがあったときは$1+\frac{1}{3}$と分解できていたことも知られている。

また、古代エジプト人は$\frac{2}{3}$を特別に扱っていることは以前から述べているが、$\frac{2}{3}$を乗数に扱うことがあった。主に加法で使われており詳細は後に述べるが、$\frac{2}{3}$をかける際の方法は多く分岐がある。整数にかけるか、また単位分数にかけるかで異なり、整数にかけるときはその整数が 30 未満かどうかで方法が異なる。分数にかける際は偶数か奇数かで方法が異なるため、それぞれ分けて以下に記す。

### 3-1-3 整数と 2/3 の乗法

・$a \times \frac{2}{3}$($a$は正の整数)

(i)　$a < 30$のとき

① $b + \frac{b}{2} = a$となる $b$を探す。

② $b$が答えとなる。

(ii) $a \geq 30$のとき

① $a = x \times 10^n + y \times 10^m + \cdots + z$($x, y, z$は正の整数)といった加法の形に$a$を分解する。
ここで、$x, y$などの位の係数は、30 未満でかつ 3 の倍数を取る。

② その後、項をそれぞれ$\frac{2}{3}$倍したものの和が答えとなる。

例えば、$a = 6$とすると、$4 + \frac{4}{2} = 6$であるため、$6 \times \frac{2}{3} = 4$である。このような計算は、慣れないと難しいものであるが、2 をかけたときに 22 になるものを知りたい時は 22 に$\frac{1}{2}$をかけるのと同じことである。現代の数学ならば、2 と$\frac{1}{2}$は逆数で、一方をかけることは一方で割ることと同義である。$\frac{2}{3}$をかけることは、$\frac{2}{3}$の逆数、つまり$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$で割ることと同じなのである。これが古代エジプト人には染み付いていたのだと考えられる。また、$27 \times \frac{2}{3}$までは表にまとめられていたため、多くの人は$a = 27$まではこの表を用いていたと考えられている。

次に$a \geq 30$のときである。具体例として、$a = 39$とし、$39 \times \frac{2}{3}$を考える。39 は 30 以上の数値であるため表に載っていないが、$39 = 3 \times 10 + 9$に分解するとどちらも表に載っていることに注意したい。つまり、$39 \times \frac{2}{3} = 30 \times \frac{2}{3} \times 10 + 9 \times \frac{2}{3} = 20 + 6 = 26$と解くことができる。

もうひとつ例を挙げる。$a = 226$とし、$226 \times \frac{2}{3}$を考える。先ほど同様に 226 を 3 の倍数を意識しながら分解すると、$226 = 21 \times 10 + 15 + 1$となる。ここで 1 の$\frac{2}{3}$は当然$\frac{2}{3}$のため、$226 \times \frac{2}{3} = 21 \times \frac{2}{3} \times 10 + 15 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = 14 \times 10 + 10 + \frac{2}{3} = 150 + \frac{2}{3}$となる。

### 3-1-4 単位分数と2/3の乗法

・エジプト式乗法$\frac{1}{a}\times\frac{2}{3}$ ($a$は正の整数)の流れ

(i) $a$が偶数の場合

$$\frac{1}{a}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{a+\frac{a}{2}}$$

が答えとなる。

(ii) $a$が奇数の場合

$$\frac{1}{a}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2*a}+\frac{1}{a*6}$$

が答えとなる。

※$a$が偶数の場合でも使用可能。(i)のほうが好まれる。

ここから先、分母が偶数である分数のことを偶数分数、分母が奇数である分数のことを奇数分数と定義する。

まず、$\frac{1}{a}$が偶数分数の場合を考える。ここでは、分数を使った計算が整数の場合の逆になることに注目する。例えば、$\frac{1}{6}\times 2$は、分母の 6 を半分にして答えが$\frac{1}{3}$となる。つまり数式にすると、$3\times 2=6$だから$\frac{1}{6}\times 2=\frac{1}{3}$と書くことができる。この考え方を$\frac{2}{3}$の掛け算にも応用すると、4 とその半分である 2 を足すと 6 になるから、$6\times\frac{2}{3}=4$となる。ここから、

$$6\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\times 6=4\text{ だから }\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}\left(=\frac{1}{4+\frac{4}{2}}\right)$$

と言える。ここで、6 は 4 に 4 の半分である 2 を加えた数値だから、分母の数にその半分を足せば、偶数分数の$\frac{2}{3}$が求められることがわかる。これは他の偶数分数でも実際に確かめられる。実際に、$\frac{1}{8}$を例に見ると$\frac{2}{3}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{12}\left(=\frac{1}{8+\frac{8}{2}}\right)$である。

次に$\frac{1}{a}$が奇数分数の場合を考える。奇数分数に$\frac{2}{3}$を掛ける際に、先述した$\frac{1}{a}$が偶数分数の場合で計算しようとすると、分母に少数が出てきてしまい、成り立たない。そこでエジプト人が使った法則として、「分数の$\frac{2}{3}$を取るには、元の数を倍して、6 を取れ」というもので、言い換えると「$\frac{2}{3}$倍したい分数の分母を 2 倍し、それに$\frac{2}{3}$倍したい分数の分母を 6 倍したものを足す」ということである。例えば、$\frac{1}{7}\times\frac{2}{3}$を計算する際は、$\frac{1}{7}$の分母の 7 の 2 倍をとる、つまり$\frac{1}{2*7}=\frac{1}{14}$となり、次に$\frac{1}{7}$の分母の 7 の 6 倍をとる、つまり$\frac{1}{7*6}=\frac{1}{42}$、これらの分数を加えると答えになるため、$\frac{1}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2\times 7}+\frac{1}{7\times 6}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$となる。実際通分するとこの単位分数の和であっている。

しかし、この方法をなぜ古代エジプト人は思いついたのであろうか。それを参考文献[1]『古代エジプトの数学　文明繁栄のアルゴリズム』で書かれている。まず奇数分数を「倍にする」ことは、実際は$\frac{1}{2}$倍しているため、半分にすることに正しい。また、「6 を取る」とは、$\frac{1}{6}$倍することと同義である。今、6 等分されているピザを考えるとわかりやすい。このピザの半分は 3 切れで、$\frac{1}{6}$は 1 切れである。これらを足すと 6 切れ中に 4 切れとなり、ピザの$\frac{2}{3}$といえる。よってある数の$\frac{2}{3}$は、その数の半分と$\frac{1}{6}$の和になる。これは偶数分数にも適用できるが、アーメス・パピルスの中で偶数分数の$\frac{2}{3}$はこの方法ではなく、上記で説明した方法が好まれて使われている。

## 3-2 除法

除法は、被乗数と積が与えられていて乗数求める時に用いられ、第 2 種の掛け算とも言える。除法の計算方法は、商が整数となる場合と、商に分数が含まれる場合で異なる。

### 3-2-1 商が整数の場合

・$a \div b$($a, b$は正の整数)

① 掛け算表の作成

・$x_n = 2^{n-1}, y_n = 2 \times y_{n-1}$として、$[x_n, y_n]$という$n \times 2$行列を掛け算表と呼び、$[x_1, y_1] = [1, b]$であり、２行目以降は$[x_n, y_n] = [2^{n-1}, 2 \times y_{n-1}]$で表す。　ただし$y_{n-1}^2 \leq a$とする。

② 必要な行を選択

・掛け算表の中から、２列目、すなわち$y_n$の列の数値を足し合わせて$a$になるように必要な値を選択する。(選択した行にチェックマークがアーメス・パピルスには付けられていた。)

・選んだ値の行の 1 列目、すなわち選択した$y_n$に対応する$x_n$を足し合わせる。

④ 選択した行の 1 列目の数を加える

・選んだ行の 1 列目の合計、すなわち選択した$x_n$の合計が$a \div b$ の結果となる。

具体例に、$a = 2072, b = 37$として 2072÷37 を解説する。まず掛け算表の 1 行目は [1,37] となり、それぞれ 2 倍していくが、2 列目が 2072（$= a$）を超えないようにする。つまり図 5 にあるような掛け算表になる。掛け算表の作成後、1 列目の数字を加算して2072($= a$)になるよう選択、つまり今回は 296,592,1184 が選択される。これらの数値の 1 列目の値を加算すると商となる。すなわち、今回の商は$32 + 16 + 8 = 56$と計算できる。

```
a/bを行います。a,bは正の整数とします。

aとbを入力してください。
整数a: 2072
整数b: 37

掛け算表を作成します。(b*2^(n-1)<=a)
掛け算表:
[1, 37]
[2, 74]
[4, 148]
[8, 296]
[16, 592]
[32, 1184]

上記の掛け算表で2列目の数字を加算し、aになるように選択します。
選択された行:
[32, 1184] ✅
[16, 592] ✅
[8, 296] ✅

選択された行の1列目を加算したら商になります。
商: 2072/37 = 32 + 16 + 8 = 56
```

【図６】$2072 \div 37$の計算

### 3-2-2 商に分数が含まれる場合

・$a \div b$($a, b$は正の整数、かつ商が分数になる場合)

① 掛け算表の作成

・$x_n = 2^{n-1}, y_n = 2 \times y_{n-1}$として、$[x_n, y_n]$という$n \times 2$行列を掛け算表と呼び、$[x_1, y_1] = [1, b]$であり、２行目以降は$2 \times y_{k-1} \le a$となるまで$[x_n, y_n] = [2^{k-1}, 2 \times y_{k-1}]$で表す。

・$[x_k, y_k] = \left[\frac{2}{3}, b \times \frac{2}{3}\right]$とする。もしくは、$[x_k, y_k] = \left[\frac{1}{b}, 1\right]$とする。

・$x_n$の和が$b$になるよう、対応した$y_n$の値を上手く選択するが、以降の行は$x_n$に必要な値が出るよう$\left[\frac{2}{3}, b \times \frac{2}{3}\right]$または$[x_k, y_k] = \left[\frac{1}{b}, 1\right]$を基に上手く計算する(主に$\times\frac{1}{2}$や$\times\frac{2}{3}$を用いる)

・また、$2 \times y_{k-1}$ が$\frac{2}{奇数}$となった場合、bunkaihyou にあるリストに基づいて単位分数に分解する。

・$2 \times y_{k-1}$ が$\frac{2}{偶数}$となった場合、約分する。

④ 必要な行を選択

・掛け算表の中から、２列目、すなわち$y_n$の列の数値を足し合わせて$a$になるように必要な値を選択する。(選択した行にチェックマークがアーメス・パピルスには付けられていた。)

・選んだ値の行の１列目、すなわち選択した$y_n$に対応する$x_n$を足し合わせる。

⑤ 選択した行の１列目の数を加える

・選んだ行の１列目の合計、すなわち選択した$x_n$の合計が$a \div b$ の結果となる。

・和に分数が２項以上出た場合は、単位分数の和のまま表す。($\frac{2}{3}$のみ例外)

具体的に、$a = 52, b = 5$ として $52 \div 5$を行う。まず掛け算表の１行目は[1, 5]となり、それぞれ２倍していくが、$y_4 = 40 \leq a = 52$となるため、$n = 4$まで２倍する。その後、$[x_5, y_5] = \left[\frac{2}{3}, 5 \times \frac{2}{3}\right]$とするが、現時点で２列目を用いて 52 に近づけていくことを考えると、$y_4$までで 40+10=50 となり、あと２を作り出したい。つまり、$\frac{2}{3}$よりも今回は$[x_5, y_5] = \left[\frac{1}{5}, 1\right]$を使用すべきであることがわかる。したがって今回の掛け算表は以下のようになる。

【$52 \div 5$の掛け算表】

[1, 5]
[2, 10]☑
[4, 20]
[8, 40]☑
[1/5, 1]
$[\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}, 2]$☑

選択されるのは、[2, 10], [8, 40], $[\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}, 2]$となり、商はこの１列目の和となる。したがって、$52 \div 5 = 2 + 8 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = 10 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$となる。

これらより乗法と除法はほぼ同じような方法で計算できることがわかる。除法の場合、逆数も理解していることがアーメス・パピルスの記述からわかっており、計算の幅が一段と広がった。

## 3-3 加法

加法は主に 2 種類に分けられ、それは整数＋整数のときと分数＋分数のときである。まず、整数＋整数のときから述べる。この場合は簡単で、現代を変わらない計算方法である。例えば、4+10 であれば当たり前であるが 14 である。分数＋分数のとき、古代エジプト数学では前述した通り任意の分数は全て単位分数に分解して考えるが、現代でいう通分を行うことができなかった。そこで、大まかに 3 つの方法で分数＋分数を行なっていた。それは、

1. 分数式をある特定数に適用する方法
2. 仮定法を使っての問題の解答
3. ある数を得るために，与えられた数に近似的に加えるべき量を決定するために使う補数の方法

の 3 点である。(A. B. Chance [2] P.5 より)1 から順に簡単に説明する。

### 3-3-1 分数式をある特定数に適用する方法

この方法を用いて具体的に、$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)$を解く。古代エジプト数学では、単位分数と整数を用いて数値を表すが、同じ単位分数を繰り返し使用することは避けられた。したがって、この式のまま、つまり$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)$のまま答えになることはなく、適切な単位分数の組み合わせに変換する必要があった。現代であれば 3 と 5 と 7 の最小公倍数である 105 を分母にとって通分をし、$\frac{92}{105}$と答えを出す。ここで「特定数」とは、計算の基準として選ばれた全体の数を指し、今回の場合は 105 である。A. B. Chance [2] pp.6 にもあるように、エジプト人はしばしば「数の集合」として具体的な数量を想定して計算を行っていた。ここでは、105 個のパンを基準として、各分数が何個のパンに相当するか考える。具体的には、105 個のパンのうち$\frac{1}{3}$(すなわち 35 個)$+\frac{1}{5}$(21 個)$+\frac{1}{7}$(15 個)の合計が 92 個であると考え、それを単位分数の和に変換する。つまり、全体 105 個のパンのうち、92 個を受け取ることになる。しかし、エジプト人は$\frac{92}{105}$という形ではなく、単位分数の和として表現する必要があるため、92 を 105 の適切な単位分数の和に分解した。

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | 105 |
| | ＼$\frac{2}{3}$ | 70 |
| | $\frac{1}{3}$ | 35 |
| | $\frac{1}{30}$ | $3\frac{1}{2}$ |
| | ＼$\frac{1}{15}$ | 7 |
| | ＼$\frac{1}{7}$ | 15 |
| 合計 | $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{15}$ | |

【図 7 】92/105 の計算(A. B. Chance [2]　P.6 より)

この計算より、パン 92 個が 105 個のパンの$\frac{2}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}$であるとわかる。このようにして分数の加法は行われている。つまり、今回は、「$\frac{2}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}$という文数式を 92 という特定数に応用する」という意味になる。エジプト人は、この方法を分数のみの加法のみでなく、時折整数も含む式にも使っていた。

また、今回は式に使われている全ての分数の分母の最小公倍数 105 を使用して、最も簡単に計算をしている。が、毎回最小公倍数を用いているわけではなく、特定の規則はなかったとアーメス・パピルスの問題にある多くの解法からわかる。取り上げられる数の多くは、計算式に使用されている分母の最大数であり、多くの場合いくつかの項は簡単な分数、いくつかの項は整数とわかりやすくなる。

### 3-3-2 仮定法を使っての問題の解答

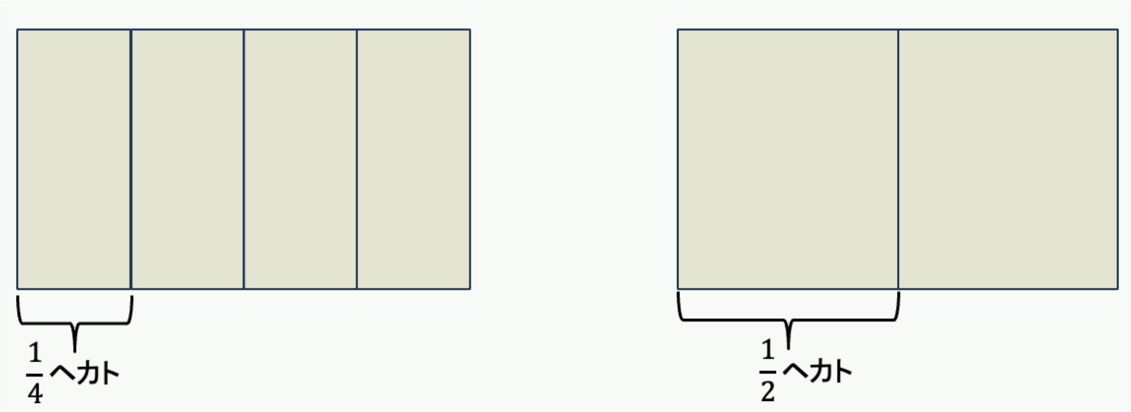
次にアーメス・パピルスに記載されている問題を、仮定法を用いて解く際の方法を解説する。仮定法とは、まず解となる数値を仮に設定し、その値を用いて計算を行い、結果を確認しながら調整する手法である。

仮定法とは、まず問題の解を仮にある具体的な数値として計算し、問題にある条件に合わせて仮定値で出た答えと比較し、結果を確認しながら比例の計算で調整し、本来の答えを導くというものである。つまり、答えではない数値をとり、その数と答えの関係を見出して答えを得るものとなる。仮定法は、乗数と積が与えられていて、被乗数を求めるという多くの掛け算で用いられている。アーメス・パピルスの中に仮定法を用いた興味深い問題があったため問 76 と問 40 の二つを使って仮定法について具体的に解説する。

問 76 は、

『10 ペフスのパン 1000 個が、20 ペフスのパンと 30 ペフスのパンいくつかと交換された。(2 種類のパンの数は同じである。いくつになるか。)』

という問題である。ここで、ヘカトとヘプスについてまず説明する。ヘカトは、エジプトで用いられていた度量衡単位のひとつで、1 ヘカトは 77L に値する。つまり今回の問題では穀物を図る単位ということになる。ヘプスとは、ある単位量の材料を料理して作ることのできる食べ物や飲み物の単位量を表し、今回の問題では 1 ヘカトの穀物からできるパンの斤数を表すことになる。図で表すと以下のようになる。




【4 ペフスのパン】　　　　　　　　　　【2 ペフスのパン】

上図より 4 ペフスのパンというのは、1 斤のパンを 4 等分しているものになる。つまり、問題の「10 ペフスのパンが 1000 個」ということは、1 斤のパンを 10 等分（10 ペフス）し、その 1 切れが 1000 個あるということになる。

　実際に問題を古代エジプト数学の方法で解く前に現代の方法で解く。現代版に問題を言い換えると、『1 kg の粉から 10 個作れるパン X と、1 kg の粉から 20 個作れるパン A と、1 kg の粉から 30 個作れるパン B がある。パン X が 1000 個あるが、パン A・パン B それぞれ何個と交換できるか？ただし、パン A・パン B の個数は同じとする。』となる。

【パン X1000 個】と【パン A $x$個、パン B $x$個】で交換するため、パン X を 1000 個作るために必要な粉と、パン A・B を$x$個作るために必要な粉を等式にし、以下のように方程式を立てる。

$$\frac{1}{10} \times 1000 = \frac{1}{20} \times x + \frac{1}{30} \times x$$

$$x = 1200$$

つまり、パン X1000 個はパン A・B1200 個ずつと交換できる。

　これを古代エジプト数学で解く。この際、仮定法を用いる。パン A・B・X それぞれ 1 個作る際に必要なヘカトは、パン A：$\frac{1}{20}$ヘカト,パン B：$\frac{1}{30}$ヘカト,パン X：$\frac{1}{10}$ヘカトである。それぞれ 30 個ずつ作ると仮定すると、パン A：$1 + \frac{1}{2}$ヘカト,パン B：1 ヘカトが必要となる。つまり、30 個ずつ作るとするとパン A・B と合わせて$2 + \frac{1}{2}$ヘカト必要になる。具体的に一度計算することで、$30 \div \left(2 + \frac{1}{2}\right)$を計算することで、1 ヘカトからパン A・B は何個ずつ作られるか考えられ、計算すると 1 ヘカトからパン A･B は 12 個ずつ作られることがわかる。ここで、10 ペフスのパン、すなわち 1 個のパンをつくるのに$\frac{1}{10}$ヘカト使うパン X が 1000 個分ということは、$\frac{1}{10} \times 1000$ =100 ヘカト使用していることがわかる。したがって、12(個/ヘカト)$\times 100 = 1200$個と交換可能であると答えが出せる。

　このように、仮定法を用いて未知数がある問題、現代でいう一次方程式の問題を解くこと

ができている。

　また、最初に 30 個で仮定している理由としては、パン A・B・X を作る際に必要なヘカトが全て分数で表されているが、その分母の数字が一番大きいものが 30 で、すべて 30 を掛けると整数で表されることが、アーメス・パピルスの諸問題から理解できていたからだと推測できる。

　次に問 40 は、

『100 個のパンを 5 人の人に(分けるのに、その分け前が等差数列をなすように)分け、多くのパンを受ける方の 3 人の(パンの合計の)$\frac{1}{7}$が、少なく受ける 2 人(のパンの合計)になるようにする。分け前の差はいくつか。』

という問題である。これは未知数がもらえる最小のパンの個数、すなわち初項と公差の 2 種類の未知数がある問題となり、現代であれば連立方程式として解くであろう。現代での解き方を軽く説明する。初項$a$, 公差$d$とすると、貰えるパンの個数はそれぞれ$a$, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$となる。条件より

$$・a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)=100$$

$$・\frac{(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)}{7}=a+(a+d)$$

これらを解いて、

$$a=\frac{5}{3},d=\frac{55}{6}$$

となる。

　アーメス・パピルス内の解答には書かれておらず、これから書くものは古代エジプト人の思考の予測に過ぎない。おそらく最初に分け前の差（公差）と貰えるパンの最小の個数を 1 と仮定している。貰えるパンの最小の個数を 1 としている理由は記載がないが、考えやすいためと推測できる。すなわち、

$$・a=1$$

$$・\frac{(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)}{7}=a+(a+d)$$

を満たす$d$を求めている。するとパンの個数はそれぞれ多い方から 5, 4, 3, 2, 1 となり、多い方の 3 人の合計 12 の$\frac{1}{7}$は$\frac{12}{7}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$となり、少ない 2 人の合計は 3 となる。ここで条件によると【多い 3 人の合計の$\frac{1}{7}$】と【少ない 2 人の合計】は等しくなる。公差を 1 と仮定した時に出る【多い 3 人の合計の$\frac{1}{7}$】と【少ない 2 人の合計】の差、つまり$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}\right)-3=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$は、実際は 0 にならなければならない。そこで次に公差を 2 と仮定する。す

るとパンの個数は多い方から 9, 7, 5, 3, 1 となり、【多い 3 人の合計の$\frac{1}{7}$】が 3 となり【少ない 2 人の合計】は 4 となる。つまり、差は 1 となる。公差を 1 増やすと、【多い 3 人の合計の$\frac{1}{7}$】と【少ない 2 人の合計】の差は$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$減っていく。どれだけ公差を増やせば、この 1+$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$が 0 になるのかを調べ、差が 0 になるような公差$d$を見つければ良い。したがって、

$$\frac{\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}\right)}{\frac{1}{4}+\frac{1}{28}}=4+\frac{1}{2}$$

より、公差を$4+\frac{1}{2}$増やせば【多い 3 人の合計の$\frac{1}{7}$】と【少ない 2 人の合計】の差である 1+$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$が 0 になるため、元々仮定している 1 にこの$4+\frac{1}{2}$を加えて、公差を$5+\frac{1}{2}$とする。

ここから以下がアーメス・パピルスに記載がある。分け前の差を$5+\frac{1}{2}$と仮定すると、

$$\frac{(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)}{7}=a+(a+d)$$

上記の条件が満たされている。このとき、5 人のパンの個数はそれぞれ$23,\ 17+\frac{1}{2},\ 12,\ 6+\frac{1}{2}$, 1 となる。これでは、パンの合計が 60 となり、

$$\cdot\, a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)=100$$

この条件が満たされていない。したがって、60 が 100 になるような因数、つまり$\frac{100}{60}=1+\frac{2}{3}$を全てのパンの個数にかければ良い。よって実際のパンの個数は

$$38+\frac{1}{3},\quad 29+\frac{1}{6},\quad 20,\quad 10+\frac{2}{3}+\frac{1}{6},\quad 1+\frac{2}{3}$$

となり、パンの合計の個数も 100 で条件を満たす。つまり、実際の分け前の差は$9+\frac{1}{6}$となる。

このように、連立方程式ではなく仮定法を用いて、古代エジプト数学の段階で未知数が二つあったとしても問題が解けていたのである。

### 3-3-3 ある数を得るために，与えられた数に近似的に加えるべき量を決定するために使う補数の方法

これは補充のような作業で、与えられたある数に近い数があるとき、それにいくら足すと与えられた数になるかを決定するために用いられた。具体的にアーメス・パピルスの問 21 を解説する。問 21 は、

『汝に言われる。何が$\frac{2}{3}+\frac{1}{15}$を 1 にするか。(15 に適用すると$\frac{2}{3}$は)10。($\frac{1}{15}$は)1(になり、)合計 11(になる)。残りは 4 である。15 に掛けて、4 を見つけよ。』

というもので、答えは以下のようにアーメス・パピルスに書かれている。

| | |
|---|---|
| 1 | 15 |
| $\frac{1}{10}$ | $1\frac{1}{2}$ |
| \\$\frac{1}{5}$ | 3 |
| \\$\frac{1}{15}$ | 1 |
| 合計 | 4 |

そこで，$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{15}$ がそれに加えられる数となる．

【図 8】問 21 の解法(参考文献[2]リンド数学パピルス, P.44 より)

問 21 を言い換えると、$X+\frac{2}{3}+\frac{1}{15}=1$の$X$を求めよというものである。問題の条件より 15 に分母を適用させる必要がある。15 の$\frac{2}{3}+\frac{1}{15}$は 11 であることが問題文よりわかり、これを 15 にするにはあと 4 必要となり、図 8 のように計算すると$\frac{4}{15}=\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$とわかり、与えられた分数の 1 について必要な補数は$\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$となり、解となる。このように、与えられた数にあとどのくらい出せばいいのかを求める際には、今で言う通分して計算しているようにも見てとれる。ただ$\frac{4}{15}$を単位分数で表現しているだけであると考える。

### 3-4 減法

減法を用いるアーメス・パピルスの問題にはなく、減法がどのように考えられていたのかは定かではない。したがってこれは私の推測でしかないが、計算する必要がなかったのではないだろうか。アーメス・パピルスの中では、具体的に、ある状況で必要になった計算が多く書かれている。例えば、パンを足したり、労働者の人数を考えるために掛けたり（『掛ける』という行為は足し算の上位互換でもある。）給料の分配で割ったり、減法以外の四則演算は具体的な場面が多くの文献にも書かれている。すなわち、引き算を用いるとき、その場にあるものから必要数取れば残ったものが差になる。当たり前のことを言っているが、わざわざ立式するほどではなかったのかもしれない。もしくは、加法を応用していた可能性もある。$1-\frac{1}{15}$を求めたければ、$\frac{1}{15}$に何を足したら 1 になるか、といった形で考えていたのではないだろうか。

# 第 4 章 結論・課題

本稿では、古代エジプト数学に関する歴史的背景と計算手法についてまとめた。古代エジプト数学では、十進法が用いられ、桁ごとに数字を並べる表記法が採用されていた。ただ、十進法ではあるが、この時代には零記号の存在がないため、位取り記数法にはなっていない。計算では、整数・単位分数・$\frac{2}{3}$を使用しており、乗法と除法に関しては倍数を利用する累積的な方法であった。計算自体は、労働の分配や穀物の計算など日常生活に密接に関わっているものが多かった。計算の効率性には限界があったが、数学発展の基礎を築き、ギリシャ数学などの後続の文明に影響を与えた。今後の課題としては、減法についてアーメス・パピルス、またそれ以外も含めて文献をより深く調査し、どのように計算されていたのかを明確にしたい。また、プログラミングに関しても、全ての計算が数値を入力しただけで計算過程と結果が出るようなものへ改良が求められる。

最後になりますが、本研究を無事に終えることができたのは、多くの方々のご支援とご指導のおかげです。ここに、心より感謝の意を表します。

まず、本研究の指導教員である桂田先生に深く感謝申し上げます。研究の進め方や論理的な思考方法について丁寧にご指導いただき、貴重な助言を賜りました。先生からの助言や疑問がなければ、本研究を完成させることはできませんでした。

また、研究室の皆様にも感謝いたします。議論を交わしながら多くの刺激を受け、研究を進める上で大変参考になりました。お世話になりました。さらに、本研究を進めるにあたり、多くの支えをいただいた家族にも感謝申し上げます。長期間にわたり励まし続けてくれたおかげで、最後まで諦めずに取り組むことができました。

本研究に関わってくださったすべての方々に、心より御礼申し上げます。

# 付録 四則演算のプログラム

## 乗法(整数×整数)

```python
from binascii import b2a_hex
def seisu_kakezan():
    # ユーザーから入力を受け取る
    print("a*bを行います。a,bは正の整数とします。\n\naとbを入力してください。")
    a = int(input("整数a: "))
    b = int(input("整数b: "))

    kotae = 0
    amari = a
    n = 1
    x_n = 1
    y_n = b

    # 掛け算表を記録するリスト
    kakezanhyou = []

    # 掛け算表の作成（2倍ごとに計算）
    while x_n <= a:
        kakezanhyou.append([x_n, y_n])
        x_n *= 2
        y_n *= 2
        if x_n > a:
           break

    # 選択した行を記録するリスト
    selected_rows = []

    # 大きな倍数から順番に選択
    for x_n, y_n in reversed(kakezanhyou):
      # power, multiple はリストの要素を分解して取り出すための変数。すなわち掛け算表から取り出す。
        if amari >= x_n:
            selected_rows.append([x_n, y_n])
            amari -=  x_n
            kotae += y_n
```

```python
    # 掛け算表を表示
    print("\n掛け算表を作成します。(b*2^(n-1)<=a)\n掛け算表:")
    for row in kakezanhyou:
        print(row)

    # 選択された行を表示
    print("\n上記の掛け算表で1列目の数字を加算し、aになるように選択します。\n選択された行:")
    for row in selected_rows:
        print(row, "✅")

    # 結果を表示
    selected_powers = [row[1] for row in selected_rows]
    print(f"\n選択された行の2列目を加算したら積になります。\n積: {a}*{b} = {' + '.join(map(str, selected_powers))} = {kotae}")

# 関数の呼び出し
seisu_kakezan()
```

乗法(整数×分数)

```
# 奇数分数の2倍を単位分数分解するリストdecompositon_data (例：2/5 = 1/3 + 1/15と表記される)
bunkaihyou = {
    "2/3": ["2/3"],
    "4/3": ["1/1","1/3"],
    "2/5": ["1/3", "1/15"],
    "2/7": ["1/4", "1/28"],
    "2/9": ["1/6", "1/18"],
    "2/11": ["1/6", "1/66"],
    "2/13": ["1/8", "1/52", "1/104"],
    "2/15": ["1/10", "1/30"],
    "2/17": ["1/12", "1/51", "1/68"],
    "2/19": ["1/12", "1/76", "1/114"],
    "2/21": ["1/14", "1/42"],
    "2/23": ["1/12", "1/276"],
    "2/25": ["1/15", "1/75"],
    "2/27": ["1/18", "1/54"],
    "2/29": ["1/24", "1/58", "1/174", "1/232"],
    "2/31": ["1/20", "1/124", "1/155"],
    "2/33": ["1/22", "1/66"],
    "2/35": ["1/30", "1/42"],
    "2/37": ["1/24", "1/111", "1/296"],
    "2/39": ["1/26", "1/78"],
    "2/41": ["1/24", "1/246", "1/328"],
    "2/43": ["1/42", "1/86", "1/129", "1/301"],
    "2/45": ["1/30", "1/90"],
    "2/47": ["1/30", "1/141", "1/470"],
    "2/49": ["1/28", "1/196"],
    "2/51": ["1/34", "1/102"],
    "2/53": ["1/30", "1/318", "1/795"],
    "2/55": ["1/30", "1/330"],
    "2/57": ["1/38", "1/114"],
    "2/59": ["1/36", "1/236", "1/531"],
    "2/61": ["1/40", "1/244", "1/488", "1/610"],
    "2/63": ["1/42", "1/126"],
    "2/65": ["1/39", "1/195"],
```

```
    "2/67": ["1/40", "1/335", "1/536"],
    "2/69": ["1/46", "1/138"],
    "2/71": ["1/40", "1/568", "1/710"],
    "2/73": ["1/60", "1/219", "1/292", "1/365"],
    "2/75": ["1/50", "1/150"],
    "2/77": ["1/44", "1/308"],
    "2/79": ["1/60", "1/237", "1/316", "1/790"],
    "2/81": ["1/54", "1/162"],
    "2/83": ["1/60", "1/332", "1/415", "1/498"],
    "2/85": ["1/51", "1/255"],
    "2/87": ["1/58", "1/174"],
    "2/89": ["1/60", "1/356", "1/534", "1/890"],
    "2/91": ["1/70", "1/130"],
    "2/93": ["1/62", "1/186"],
    "2/95": ["1/60", "1/380", "1/570"],
    "2/97": ["1/56", "1/697", "1/776"],
    "2/99": ["1/66", "1/198"],
    "2/101": ["1/101", "1/202", "1/303", "1/606"]
}
```

```
from fractions import Fraction
from collections import defaultdict

# 単位分数に分解する関数
def bunkai(fraction): # fraction:分解したい分数
    fraction_str = str(fraction) # str:文字列に変換する、すなわち分数(x/y)を文字列とみなす。
    if fraction_str in bunkaihyou: # decompotision_dataにfractionがあれば、decompotision_dataにある通り出力する。
        return bunkaihyou[fraction_str]
    return [fraction_str]  # 分解データがない場合はそのまま返す

# 分数の各項を2倍して再分解する関数
def twice_bunkai(bunsu, twice): # bunsu:分解する分数、twice:2倍
    result = []
    for unit_bunsu in bunsu:
        # 分数かどうかを判定
        if '/' in unit_bunsu:  # スラッシュがある場合、分数とみなす。
            num, denom = unit_bunsu.split('/')  # num=分子、denom=分母と分けている。
            new_bunsu = Fraction(int(num) * twice, int(denom))  # 分子のみ2倍し、new_fractionとして新しい分数とする。
        else:  # スラッシュがない場合、整数とみなす。
            new_bunsu = Fraction(int(unit_bunsu) * twice, 1) # 分母を1として分数として扱う

        # new_fraction を 関数bunkai で再分解する
        decomposed_new_bunsu = bunkai(new_bunsu)
        result.extend(decomposed_new_bunsu)

    return result

# 分数を単位分数にまとめる関数、単位分数のリストを簡約化（同じ分母を持つ項をまとめる）し、再分解
# ここで、分母が偶数か奇数かどうかで場合分けをする。
# 偶数の場合、加算し約分する。
# 奇数の場合、加算し分母が2の状態にし、単位分数分解を行う。
def matome_bunkai_sum(decomposed_sum):
    # 分母ごとに項を合算
    bunsu_count = defaultdict(Fraction) #初期値をFraciton(0)に設定してくれる辞書
    for unit_fraction in decomposed_sum: # エジプト式で表現された単位分数のリスト　例：7/3の場合、リストは["1","1","1/3"]
```

```
        # ここでdecomposed_sumがリストのことで、unit_fractionがdecomposed_sumから各要素を一つずつ取り出す。
        fraction = Fraction(unit_fraction) # 取り出された各要素をFraction型に変換
        bunsu_count[fraction.denominator] += fraction # 分母に焦点を当て、分数を加算

    # 合算した分数を再度分解
    bunsu_sum = [] # 結果を格納するリスト
    for denom, fraction in bunsu_count.items(): # 合算された分数を順に処理
      # fraction_countは分母に焦点を当てて「その分母に対応する合計分数」（実質分子）が値として格納されている。
      # .items()の部分で、分母と値のペアを順に取り出している。
      if fraction == Fraction(4,3): # 4/3 = 1 + 1/3と分解するため特例
          bunsu_sum.append("1")
          bunsu_sum.append("1/3")
      elif fraction.numerator % 2 == 0:  # 偶数の場合、通常の約分
            bunsu_sum.append(str(fraction)) # 分数を文字列として追加
      else:  # 奇数の場合、単位分数として再分解
            bunsu_sum.extend(bunkai(fraction)) # extendでリストに追加

    return bunsu_sum

    # エジプト式の掛け算
def kakezan_bunsu(a, b):
    kakezanhyou = [] # 2倍の表をリストとして格納する
    # 各行には「列1: 2の累乗」「列2: 分数bを2倍した値」「列3: 列2の単位分数分解結果」が入ります。
    x_n = 1  # 2倍していく基準値(1,2,4,...)
    y_n = Fraction(b)  # 分数bを Fraction 型で処理

    # 初期行を生成
    decomposed_bunsu = bunkai(y_n) # 分数bを単位分数に分解
    kakezanhyou.append([x_n, y_n, decomposed_bunsu]) # 初期行(2^0,b,bの分解結果)を追加

    # 次の行を生成していく
    while x_n <= a: # aを越えるまでループ
        x_n *= 2  # iを2倍
        y_n *= 2  # 分数bも2倍
```

```
        if x_n <= a:
          # 前の行の分解結果を2倍して新しい分数を生成
          previous_y_n = kakezanhyou[-1][2]  # 前の行の分解結果を取得。これを2倍し、現在の行の分解結果を計算する。
          # ここでkakezanhyou[-1]とはlの最後の要素のことで、kakezanhyou[-1][2]となると最後の要素の中の3番目の要素（単位分数分解結果）を取得してる。
          # 例えばa=7,b=3/5だとすると、kakezanhyouは以下になる。
         #kakezanhyou = [
         # [1, 3/5, ['1/2', '1/10']],  # 初期行
          # [2, 6/5, ['1/1', '1/5']],   # 2倍した行
          # [4, 12/5, ['2/1', '2/5']],  # さらに2倍した行
          # ]
          # ここでkakezanhyou[-1]は[4, 12/5, ['2/1', '2/5']]  kakezanhyou[-1][2]は['2/1', '2/5']
          bunkai_y_n = twice_bunkai(previous_y_n, 2) # 各項を2倍し、再度分解する
          kakezanhyou.append([x_n, y_n, bunkai_y_n]) # 新しい行を掛け算表に追加

    # 掛け算表の出力
    print("\n掛け算表を作成します。(b*2^(n-1)<=a)\n掛け算表:")
    for row in kakezanhyou:
        bunkai_row = ' + '.join(row[2]) # 単位分数を文字列として結合。間に＋をはさむ。
        print(f"[{row[0]}, {row[1]} = {bunkai_row}]") # 分解前＝分解後の和になるように

    # aに対応する部分を選択して積を計算
    kotae = Fraction(0) # 積を格納する場所
    selected_rows = [] # 選択した行を記録するリスト。各行は文字列として追加される
    amari = a # どの行を選ぶかを決めるためのもの。初期値はa
    # amariを減らしていきながらどの行を選択するか決定する。
    # 具体的には掛け算表の各行の一列目を引いていく。
    # 初期値a=7とすると、最初に4を選び、amari=3、次に2を選び、amari=1...
    bunkai_sum = []  # 選択した行の右辺の単位分数の和を保持するリスト

    for row in reversed(kakezanhyou): # 掛け算表を後ろから処理していく。
        if amari >= row[0]: # amariからの行の値を引けるか確認
            amari -= row[0]  # 対応する部分を選択、引ける場合は減らす
            kotae += row[1]  # 積をkotaeに格納、加算
            # 分解された右辺の項を和として保持
            bunkai_sum.extend(row[2]) # 単位分数を追加
            bunkai_row = ' + '.join(row[2]) # 単位分数を＋で結合
```

```python
            selected_rows.append(f"[{row[0]}, {row[1]} = {bunkai_row}]✅")

    # 選ばれた行を出力
    print("\n上記の掛け算表で1列目の数字を加算し、aになるように選択します。\n選択された行:")
    for selected_row in selected_rows:
        print(selected_row)

    # 結果の出力（選択された行の右辺の和）
    matome_sum = matome_bunkai_sum(bunkai_sum)
    # refined_sum = refine_odd_fraction(simplified_sum)
    print(f"\n選択された行の2列目を加算したら積になります。\n積: {a}*{b} = {' + '.join(bunkai_sum)} = {' + '.join(matome_sum)}")
```

```python
# ユーザー入力を処理
print("a*bを行います。aは正の整数、bは正の分数とします。\n\naとbを入力してください。")
a = int(input("整数a: "))
b = input("分数b(例: 1/7): ")

# 分数をFraction型に変換
b_fraction = Fraction(b)

# 計算の実行
kakezan_bunsu(a, b_fraction)
```

## 除法(整数/整数)

```python
from binascii import b2a_hex
def seisu_warizan():
    # ユーザーから入力を受け取る
    print("a/bを行います。a,bは正の整数とします。\n\naとbを入力してください。")
    a = int(input("整数a: "))
    b = int(input("整数b: "))

    kotae = 0
    amari = a
    n = 1
    y_n = b

    # 掛け算表を記録するリスト
    kakezanhyou = []

    # 掛け算表の作成（2倍ごとに計算）
    while y_n <= a:
        kakezanhyou.append([n, y_n])
        y_n *= 2
        n *= 2

    # 選択した行を記録するリスト
    selected_rows = []

    # 大きな倍数から順番に選択
    for x_n, y_n in reversed(kakezanhyou):
      # power, multiple はリストの要素を分解して取り出すための変数。すなわち掛け算表から取り出す。
        if y_n <= amari:
            selected_rows.append([x_n, y_n])
            amari -=  y_n
            kotae += x_n

    # 掛け算表を表示
    print("\n掛け算表を作成します。(b*2^(n-1)<=a)\n掛け算表:")
    for row in kakezanhyou:
        print(row)
```

```python
    # 選択された行を表示
    print("\n上記の掛け算表で2列目の数字を加算し、aになるように選択します。\n選択された行:")
    for row in selected_rows:
        print(row, "☑️")

    # 結果を表示
    selected_powers = [row[0] for row in selected_rows]
    print(f"\n選択された行の1列目を加算したら商になります。\n商: {a}/{b} = {' + '.join(map(str, selected_powers))} = {kotae}")

# 関数の呼び出し
seisu_warizan()
```

# 参考文献

[1]David Reimer(著)、礒田正美(監修)、冨永星(訳),『古代エジプトの数学　文明繁栄のアルゴリズム』,丸善出版(2017年8月30日発行)
[2] A. B. Chance(著)、平田寛(監修)、吉成薫(訳),『リンド数学パピルス(普及版)古代エジプトの数学』, 朝倉書店(2006年1月25日発行)
[3] 亀山武夫,『古代数学についてーエジプトとバビロニアを中心にー』,( https://hyogo-u.repo.nii.ac.jp/records/5775 )(兵庫教育大学大学院学位論文),(pp.40-42) (1992年発行)
[4]礒田正美,『古代エジプトの数学の世界へようこそ！』,
( https://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/museum/RhindPapyrus/index.htm )(閲覧日：2025年1月10日)
[5]鎌田次男,　『古代算術に潜む算法の術』(日本数学教育学会誌, 第90巻, 第12号, pp. 19-24) (2008年) ( https://doi.org/10.32296/jjsme.90.12_19 )(閲覧日：2025年2月6日)
[6]遠山啓,『数学入門(上)』, 岩波新書(1959年11月17日発行)
[7]オットー・ノイゲバウアー(著)、矢野道雄・斎藤潔(訳),『古代の精密科学』, 恒星社厚生閣(1984年2月10日発行)
[8]ジョージ・G・ジョーゼフ(著)、垣田高夫・大町比佐栄(訳),『非ヨーロッパ起源の数学　もう一つの数学史』, 講談社(1996年5月20日)
[9]Fukusuke,『【数学史２－２】古代エジプトの数字は絵文字！読み方や由来、表記方法を解説！』,
( https://mathsuke.jp/history2-2/#index_id7 )(閲覧日：2025年1月10日)
[10]宮川創・吉野宏志・永井正勝,『古代エジプト語のヒエログリフ入門：ロゼッタストーン読解｜第15回　ヒエログリフの数字 (前編)』( https://www.hituzi.co.jp/hituzigusa/2019/11/28/hieroglyph-15/ )(閲覧日：2025年1月10日)
[11]『リンド数学パピルス』( https://ja.wikipedia.org/wiki/リンド数学パピルス )(閲覧日：2025年1月10日)
[12]『Berlin Papyrus 6619』( https://en.wikipedia.org/wiki/Berlin_Papyrus_6619 )(閲覧日：2025年1月10日)
[13]『モスクワ数学パピルス』( https://ja.wikipedia.org/wiki/モスクワ数学パピルス )(閲覧日：2025年1月10日)
[14]『Reisner Papyrus』( https://en.wikipedia.org/wiki/Reisner_Papyrus )(閲覧日：2025年1月10日)
[15]加藤文元,『数学の世界史』, 株式会社KADOKAWA(2024年2月28日発行)