

2023 年度卒業研究レポート

ボウリングの数理

明治大学 総合数理学部 現象数理学科

塚原彰悟

2024 年 2 月 29 日

目次

第1章	はじめに	2
第2章	ボウリングの運動	3
2.1	重力	3
2.2	速度	3
2.3	加速度	3
2.4	角速度	3
2.5	角加速度	3
2.6	摩擦力	3
2.7	運動方程式	4
2.8	角運動量	4
2.9	慣性テンソル	5
2.10	慣性主軸	6
2.11	オイラーの剛体方程式	6
第3章	プログラム	7
3.1	ボールの運動を表す微分方程式	7
3.2	条件設定	7
3.3	プログラム	8
第4章	まとめ	11

第1章 はじめに

ボウリングというものをご存知だろうか。ボウリングとは直径約 21.5cm のボールを 18m 先にあるピラミッド状に並んだ 10 本のピンに当て、出来るだけピンを多く倒していくスポーツである。ボウリング自体の歴史はとても古く、紀元前 5000 年頃の古代エジプトからとも言われているほどである。そして今では日本人にとって国民に馴染みの深いスポーツの一種でもあり、プロボウラーというボウリングのプロ選手も存在するほど遊ばれているスポーツである。ボウリングのルールとして 1 ゲームは 10 個に分かれており、この 1 つ 1 つをフレームと言う。1 フレームの中で 2 回投げることができ、1 回目ですべて 10 本のピンを倒すことができるとストライクとなり、1 フレーム内の最高得点を獲得できる。一般的にストライクを取るためには、1 番ピンの少しだけ横のポケットと呼ばれる場所を狙うことが多く、右利きの場合は 1 番ピンの少し右、1 番ピンと 3 番ピンの間である。本研究では松田 [2]、片倉 [3]、Normani[4] を参考に、ボウリングの運動を式で表す。そしてポケットに入りやすい軌跡や投げ方を予測できるようなプログラムを作成し、剛体の運動のシミュレーションを考える。

第2章 ボウリングの運動

ボウリングのボールはウレタン樹脂やポリエステル樹脂からできている。この素材は衝撃や摩擦に強いことからボールは剛体とみなすことができる。剛体とはどんな力を受けても形や体積を変えず質量分布が一定のものである。また今回ボウリングの運動を考える際にボールは完全な球体で重心と幾何中心が同じであると仮定し、空気抵抗も無視するものとした。この章は馬場 [1] を参考にした。

2.1 重力

地球上では全ての物体に対し地面方向への力を受けており、これを重力という。物体の質量を $m[\text{kg}]$ 重力加速度を $g[\text{m/s}^2]$ として重力は $mg[\text{N}]$ で表される。

2.2 速度

物体の1秒あたりの位置座標の変化量のこと。単位は $[\text{m/s}]$ である。

2.3 加速度

物体の1秒あたりの速度の変化量のこと。単位は $[\text{m/s}^2]$ である。

2.4 角速度

ある点を基準として物体が1秒あたりに進んだ角度のこと。単位は $[\text{rad/s}]$ である。

2.5 角加速度

ある点を基準として物体が1秒あたりに進んだ時の角速度の変化量のこと。単位は $[\text{rad/s}^2]$ である。

2.6 摩擦力

ボウリングのボールはレーン上を動く時、ボールと接してる点においてレーンから摩擦を受ける。摩擦力は摩擦係数と物体が面から垂直に受ける力である垂直抗力の積で表される。ボールが受ける摩擦は、ボールが滑るときと転がるときの2パターンに分けられる。まず、ボールがレーン上に沿って動く(滑る)時には動摩擦が働く。ボールが滑る条件は F_s をボールが受ける動摩擦とすると、

$$|\vec{F}_s| > \mu_s N \quad (2.1)$$

(μ_s : 静止摩擦係数, N : 物体が床から受ける垂直抗力)

である。この条件が成り立たない時にボールはレーン上を転がりながら運動をする。この場合は面に平行な成分の力として静止摩擦が働く。

2.7 運動方程式

運動方程式とは1つの物体に作用する力とその運動の関係を表した式である。物体の質量と速度の積で表される運動量の変化率は、物体に作用する力に等しい。ボールは床から外力である摩擦を受けているので重心の座標を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると、運動方程式

$$f = m \begin{pmatrix} \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

(m : ボールの質量, f : ボールが受けている外力)

が成り立つ。(2.2) 式は2階の微分方程式で表されているので t を時刻とし、ベクトル値関数 $X(t)$ を用いることで1階の微分方程式に変換することができる。

$$x_1(t) := x(t), \quad x_2(t) := x'(t), \quad X(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

とすると、

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$$

となる。質点の運動方程式 $m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = f(t)$ の場合、

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{1}{m} f(t) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

となる。

2.8 角運動量

原点 O に対し位置ベクトル r を持つ点 P がベクトル量 b を持つ時、外積 $r \times b$ のことをモーメントという。運動方程式 $\frac{dp}{dt} = f(p = mv)$ の両辺のモーメントについて考えると、

$$r \times f = r \times \frac{dp}{dt} \quad (2.4)$$

となる。(2.4) 式の左辺を力のモーメント N とすると、

$$N = \frac{d}{dt}(r \times p) \quad (2.5)$$

となる。(2.5) 式の右辺の $r \times p$ を角運動量と呼び $r \times p = L$ とした時、

$$N = \frac{dL}{dt} \quad (2.6)$$

(N : 力のモーメント, L : 角運動量)

と表され、一般に (2.6) 式は角運動量の方程式、または回転の運動方程式と呼ばれる。

2.9 慣性テンソル

ボールは回転しながら動くので剛体の回転運動について考える必要がある。角速度ベクトルを ω とした時、時刻 t の関数として、

$$\omega = \omega(t) = \begin{bmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{bmatrix}$$

となる。ここで角速度の定義から ω を角速度とした時 $r\omega = v$ が成り立つ。この式はベクトル公式として $\omega \times r = v$ という外積の形で表すことができる。この剛体の O まわりの回転運動の角運動量ベクトルを L とすると、

$$L = L(t) = \begin{bmatrix} L_x(t) \\ L_y(t) \\ L_z(t) \end{bmatrix}$$

$p = mr, \omega \times r = v$ であり、剛体は質点の集合と考えることができるのでモーメントの定義から、

$$L = \sum_{k=1}^n r_k \times p_k = \sum_{k=1}^n m_k (r_k \times \dot{r}_k) = \sum_{k=1}^n m_k \{r_k \times (\omega \times r_k)\} \quad (2.7)$$

となる。(2.7) 式の $r_k \times (\omega \times r_k)$ について考えるとベクトル3重積の公式を用いて、

$$\begin{aligned} r_k \times (\omega \times r_k) &= (r_k \cdot r_k)\omega - (r_k \cdot \omega)r_k \\ &= (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} - (x_k\omega_x + y_k\omega_y + z_k\omega_z) \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (y_k^2 + z_k^2)\omega_x - x_k y_k \omega_y - z_k x_k \omega_z \\ -x_k y_k \omega_x + (z_k^2 + x_k^2)\omega_y - y_k z_k \omega_z \\ -z_k x_k \omega_x - y_k z_k \omega_y + (x_k^2 + y_k^2)\omega_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.8)$$

(2.8) を (2.7) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=1}^n m_k \begin{bmatrix} (y_k^2 + z_k^2)\omega_x - x_k y_k \omega_y - z_k x_k \omega_z \\ -x_k y_k \omega_x + (z_k^2 + x_k^2)\omega_y - y_k z_k \omega_z \\ -z_k x_k \omega_x - y_k z_k \omega_y + (x_k^2 + y_k^2)\omega_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega_x \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2) - \omega_y \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k - \omega_z \sum_{k=1}^n m_k z_k x_k \\ -\omega_x \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k + \omega_y \sum_{k=1}^n m_k (z_k^2 + x_k^2) - \omega_z \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k \\ -\omega_x \sum_{k=1}^n m_k z_k x_k - \omega_y \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k + \omega_z \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

(2.9) 式は $I_x = \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2)$, $\sum_{k=1}^n m_k (z_k^2 + x_k^2)$, $\sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2)$ という慣性モーメントの形と $I_{xy} = \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k$, $I_{xz} = \sum_{k=1}^n m_k z_k x_k$, $I_{yz} = \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k$ という回転軸に対する物体の抵抗を表す慣性乗積の形を用いて、

$$L = \begin{bmatrix} I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{zx} \omega_z \\ -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z \\ -I_{zx} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_z \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

となり、(2.10) 式の下線部分を慣性テンソルと呼ぶ。慣性テンソルを A とすると $L = A\omega$ となるのがわかる。

2.10 慣性主軸

慣性テンソル A は対称行列となっているので直交行列 U で対角化可能であることがわかる。この U の列ベクトルを i, j, k とすると $U = \begin{bmatrix} i & j & k \end{bmatrix}$ となり、 i, j, k は正規直交基底であるがこれを慣性主軸と呼ぶ。この i, j, k が運動座標系に選んであるとすると、 L は、

$$L = \begin{bmatrix} L_x(t) \\ L_y(t) \\ L_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{bmatrix}$$

となり、慣性主軸である i, j, k を用いることで、

$$L = I_x \omega_x i + I_y \omega_y j + I_z \omega_z k \quad (2.11)$$

と簡潔に表すことが出来る。(2.11) 式を (2.6) 式の角運動量の方程式 $N = \frac{dL}{dt}$ に代入し、積の微分公式を用いて整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{d}{dt}(I_x \omega_x i + I_y \omega_y j + I_z \omega_z k) \\ &= I_x \left(\frac{d\omega_x}{dt} i + \omega_x \frac{di}{dt} \right) + I_y \left(\frac{d\omega_y}{dt} j + \omega_y \frac{dj}{dt} \right) + I_z \left(\frac{d\omega_z}{dt} i + \omega_z \frac{dk}{dt} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

となる。(2.12) 式の $\frac{di}{dt}, \frac{dj}{dt}, \frac{dk}{dt}$ について考えると、 $\omega \times r = \frac{dr}{dt}$ から、

$$\frac{di}{dt} = \omega \times i = \omega_z j - \omega_y k \quad (2.13)$$

$$\frac{dj}{dt} = \omega \times j = -\omega_z i + \omega_x k \quad (2.14)$$

$$\frac{dk}{dt} = \omega \times k = \omega_y i - \omega_x j \quad (2.15)$$

となり、これが慣性主軸の微分方程式となる。

2.11 オイラーの剛体方程式

(2.12) に (2.13), (2.14), (2.15) を代入すると、

$$\frac{dL}{dt} = I_x \left\{ \frac{d\omega_x}{dt} i + \omega_x (\omega_z j - \omega_y k) \right\} + I_y \left\{ \frac{d\omega_y}{dt} j + \omega_y (-\omega_z i + \omega_x k) \right\} + I_z \left\{ \frac{d\omega_z}{dt} i + \omega_z (\omega_y i - \omega_x j) \right\}$$

i, j, k でまとめると、

$$= \left\{ I_x \frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z \right\} i + \left\{ I_y \frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x \right\} j + \left\{ I_z \frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y \right\} k$$

であり、 $N = N_x i + N_y j + N_z k$ であることから、 i, j, k の成分でそれぞれ比較することで、

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z = N_x \quad (2.16)$$

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x = N_y \quad (2.17)$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y = N_z \quad (2.18)$$

が導出される。この式をオイラーの剛体方程式という。

第3章 プログラム

3.1 ボールの運動を表す微分方程式

剛体の運動は位置に関する式、回転に関する式、回転軸の変化に関する式について考える必要がある。位置に関する式としては運動方程式をベクトル値関数を用いて表した (2.3) の式、

$$X'(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{1}{m}f(t) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

回転に関する式は (2.16),(2.17),(2.18) のオイラーの剛体方程式を $\frac{d\omega}{dt}$ の形に変形した式、

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{N_x + (I_y - I_z)\omega_y\omega_z}{I_x} \quad (3.2)$$

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \frac{N_y + (I_z - I_x)\omega_z\omega_x}{I_y} \quad (3.3)$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{N_z + (I_x - I_y)\omega_x\omega_y}{I_z} \quad (3.4)$$

回転軸に関する式は (2.13),(2.14),(2.15) の慣性主軸の式、

$$\frac{di}{dt} = \omega \times i = \omega_z j - \omega_y k \quad (3.5)$$

$$\frac{dj}{dt} = \omega \times j = -\omega_z i + \omega_x k \quad (3.6)$$

$$\frac{dk}{dt} = \omega \times k = \omega_y i - \omega_x j \quad (3.7)$$

を用いれば良い。

3.2 条件設定

まず座標軸を設定する。投球する方向を正とし、1番ピンと5番ピンの中心を通る直線 (図 (3.1) の青線) を X 軸、1, 2, 4, 7番ピンがある方を正とし、1番ピンの中心から負の方向に 18.29m 離れた X 軸上の点を通り、垂直に交わる直線 (図 (3.1) の赤線) を Y 軸とし、 X 軸、 Y 軸に対し垂直かつ X 軸、 Y 軸の交点を通る直線 (図 (3.1) の黄線) を Z 軸とし、ピンが立っている方向を正とする。各座標軸の交わる点 O からボールは発射されるものとし、レーンの幅は 1.066m とする。ボールの初速度などの条件は個人で異なることから、パラメータの数値を変えることで対応していくものとした。



図 3.1: レーンと座標軸の関係

3.3 プログラム

Python を使用した。初期のパラメータの部分は Normani[4] で出てきた数値を入れている。

```

1  import math
2  import numpy as np
3  from scipy.integrate import odeint
4  import matplotlib.pyplot as plt
5
6  g = 9.81
7   $\mu$  = 0.12
8  s = 0.2
9  R = 0.1085
10 m = 7
11 v0 = 8
12  $\theta$  = 0
13  $\omega_x$  = 7.76
14  $\omega_y$  = -28.98
15  $\omega_z$  = 0
16 Ix = 0.033
17 Iy = 0.033
18 Iz = 0.033
19
20 import math
21
22 def func(X, t,  $\mu$ , g, R, m, Ix, Iy, Iz):
23     if math.sqrt(( $\mu$ *g/math.sqrt((X[2]-R*X[5])**2+(X[3]+R*X[4])**2)*math.sqrt
24         ((X[2]-R*X[5])**2))**2+ $\mu$ *g/math.sqrt((X[2]-R*X[5])**2+(X[3]+R*X[4])**2)*
25         math.sqrt((X[3]+R*X[4])**2)**2) < s*m*g :
```

```

26     dXdt = [X[2], X[3], -μ *g/math.sqrt((X[2]-R*X[5])**2+(X[3]+R*X[4])**2)*
27             math.sqrt((X[2]-R*X[5])**2), -μ *g/math.sqrt((X[2]-R*X[5])**2
28             +(X[3]+R*X[4])**2)*math.sqrt((X[3]+R*X[4])**2),
29             (-R*μ *m*g/math.sqrt((X[2]-R*X[5])**2+(X[3]+R*X[4])**2)*math.sqrt
30             ((X[3]+R*X[4])**2)+(Iy - Iz)*X[5]*X[6])*X[7]/Ix,
31             (R*μ *m*g/math.sqrt((X[2]-R*X[5])**2+(X[3]+R*X[4])**2)*math.sqrt
32             ((X[2]-R*X[5])**2)+(Iz - Ix)*X[6]*X[4])*X[8]/Iy,
33             (Ix - Iy)*X[4]*X[5]*X[9]/Iz,
34             X[6]*X[8]-X[5]*X[9], X[4]*X[9]-X[6]*X[7], X[5]*X[7]-X[4]*X[8]]
35     else:
36         dXdt =[X[2], X[3], R*(R*μ *m*g/math.sqrt((X[2]-R*X[5])**2+(X[3]+R*X[4])**2)
37             *math.sqrt((X[2]-R*X[5])**2)+(Iz - Ix)*X[6]*X[4])*X[8]/Iy,
38             -R*(-R*μ *m*g/math.sqrt((X[2]-R*X[5])**2+(X[3]+R*X[4])**2)
39             *math.sqrt((X[3]+R*X[4])**2)+(Iy - Iz)*X[5]*X[6])*X[7]/Ix,
40             (-R*μ *m*g/math.sqrt((X[2]-R*X[5])**2+(X[3]+R*X[4])**2)
41             *math.sqrt((X[3]+R*X[4])**2)+(Iy - Iz)*X[5]*X[6])*X[7]/Ix,
42             (R*μ *m*g/math.sqrt((X[2]-R*X[5])**2+(X[3]+R*X[4])**2)
43             *math.sqrt((X[2]-R*X[5])**2)+(Iz - Ix)*X[6]*X[4])*X[8]/Iy,
44             (Ix - Iy)*X[4]*X[5]*X[9]/Iz,
45             X[6]*X[8]-X[5]*X[9], X[4]*X[9]-X[6]*X[7], X[5]*X[7]-X[4]*X[8]]
46
47     return dXdt
48
49     X0 = [0, 0, v0*math.cos(math.radians(θ)), v0*math.sin(math.radians(θ)), ω
50     x, ω y, ω z,1,1,1]
51     t = np.arange(0, 10, 0.01)
52     X = odeint(func, X0, t, args=(μ, g, R, m, Ix, Iy, Iz))
53
54     def plot_bowling_pins():
55
56         pin_coordinates = np.array([
57             [18.29, 0],
58             [18.554, 0.1524],
59             [18.554, -0.1524],
60             [18.818, 0.3048],
61             [18.818, -0.3048],
62             [18.818, 0],
63             [19.082, 0.1524],
64             [19.082, -0.1524],
65             [19.082, 0.4572],
66             [19.082, -0.4572],
67         ])
68
69     plt.figure(figsize=(20.29, 1.066))
70     plt.scatter(pin_coordinates[:, 0], pin_coordinates[:, 1], marker='o', color=

```

```

71  'black', s=30)
72  plot_bowling_pins()
73
74
75  plt.plot(X[:, 0], X[:, 1])
76  plt.xlim(0, 20.29)
77  plt.ylim(-0.533, 0.533)
78  plt.xlabel('x', fontsize=10)
79  plt.ylabel('y', fontsize=10)
80
81  plt.title('Bowling Ball Motion')
82  plt.show()

```

6~18では初期パラメータ設定、22~25では(2.1)の摩擦の条件、26~47では(3.1)~(3.7)の7つの式、54~72ではピンの位置やレーンの長さなどの設定をしている。なお s は静止摩擦係数、 μ は動摩擦係数、 R はボールの半径、 v_0 は初速度、 θ は投球角度であり、その他の記号は本稿で出てきたものと対応している。この初期条件の場合は図(3.2)のような結果となる。青線がボールの軌跡である。

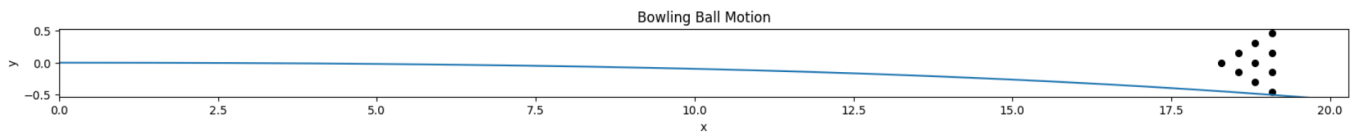


図 3.2: 実行結果

第4章 まとめ

ボウリングの運動を表す微分方程式を導出し、それを用いたプログラム作成を行った。球がレーン上を動く時のプログラムしか考えられていないこと、ピンに当たった後や投げてレーンに着地するまでの運動を考慮できていないこと、ボールに指を入れる穴があるにも関わらず完全な球であると仮定してしまっていることなど多くの課題が残ってしまったが、剛体の運動を示すプログラム例がほぼない中での作業で、式の導出からボウリングの運動の完全な再現とまではいかないがプログラムの大元はできたと自分では考えている。

参考文献

- [1] 馬場 敬之, スバラシク実力がつくと評判の力学キャンパス・ゼミー大学の物理がこんなに分かる!単位なんて楽に取れる!, マセマ出版社 (2020 年).
- [2] 松田 諒, ボウリングの力学的シミュレーション, 南山大学 数理情報学部, 2014 年度卒業論文.(2015 年) <https://www.st.nanzan-u.ac.jp/info/gr-thesis/2014/11se155.pdf>
- [3] 片倉 孝規, ボウリングの数理モデル, 2016 年度桂田研卒業研究レポート (2017/2/10), <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/2015/report/2016-katakura.pdf>
- [4] Franco Normani, The physics of Bowling
<http://www.real-world-physics-problems.com/physics-of-bowling.html>
- [5] 和達 三樹, 十河 清, 出口 哲生, ゼロからの力学 II, 岩波書店 (2019 年)
- [6] 桂田 祐史, 常微分方程式を学ぶ ー基礎の学習と数値シミュレーションー(2024/2/17)
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/ode-workbook.pdf>