

2023 年度卒業研究レポート

# 生物の個体数変動の数理モデル

4-2-12 鎌倉賢人

2024 年 2 月 29 日

# 目次

第1章	はじめに	3
第2章	1種の生物における個体数の変動	4
2.1	Malthusの法則	4
2.2	Logstic方程式	5
第3章	Lotoka-Volterra方程式 (2種の生物における個体数の変動(被食者・捕食者の関係))	6
3.1	平衡点と安定性	6
3.2	解軌道	7
第4章	May-Leonardのモデル (3種間の競争)	9
4.1	平衡点	10
4.2	平衡点の安定性	10
4.3	$\alpha + \beta = 2$ の場合	14
4.4	まとめ	15
第5章	May-Leonardのモデルと聖域からの供給を考慮したMay-Leonardのモデルの 比較	16
5.1	$0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ のとき	18
5.1.1	平衡点と安定性について	18
5.1.2	シミュレーションについて	19
5.2	$\alpha > 1 \wedge \beta > 1$ のとき	20
5.2.1	平衡点と安定性について	20
5.2.2	シミュレーションについて	21
5.3	$\alpha > 1 \wedge \beta < 1 \wedge \alpha + \beta > 2$ のとき	22
5.3.1	平衡点と安定性について	22
5.3.2	シミュレーションについて	23
5.4	$\alpha > 1 \wedge \beta < 1 \wedge \alpha + \beta < 2$ のとき	24
5.4.1	平衡点と安定性について	24
5.4.2	シミュレーションについて	25
5.5	$\alpha < 1 \wedge \beta > 1 \wedge \alpha + \beta > 2$ のとき	26
5.6	$\alpha < 1 \wedge \beta > 1 \wedge \alpha + \beta < 2$ のとき	26
5.7	さまざまな実験からわかったこと	26
第6章	今後の課題	29
第7章	付録プログラム	30
7.1	Logstic方程式のシミュレーション(Python)	30

7.2	Lotoka-Volterra 方程式の解軌道のシミュレーション (Python) . . . . .	31
7.3	第 5 章で用いたシミュレーション (Python) . . . . .	32
7.4	第 5 章で平衡点の数値計算に用いたもの (Mathematica) . . . . .	33

# 第1章 はじめに

私は、桂田先生の研究室で微分方程式を勉強していた。そこで興味を持ったのは、生物の個体数のモデルである。具体的には、以下のようなモデルを勉強した。

- i. Malthus の法則・・・外的影響を全く受けない1種の個体数の変動を表したモデル

$$\frac{dp(t)}{dt} = rp(t)$$

- ii. Logistic 方程式・・・外的影響を受ける1種の個体数の変動を表したモデル

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

- iii. Lotoka-Volterra 方程式・・・2種の個体数の変動(被食者・捕食者の関係)を表したモデル

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

- iv. May-Leonard のモデル(3種間の競争)

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(r_1 - \alpha_{11}N_1 - \alpha_{12}N_2 - \alpha_{13}N_3) \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(r_2 - \alpha_{21}N_1 - \alpha_{22}N_2 - \alpha_{23}N_3) \\ \frac{dN_3}{dt} = N_3(r_3 - \alpha_{31}N_1 - \alpha_{32}N_2 - \alpha_{33}N_3) \end{cases}$$

この中で、私が1番重きを置いて研究したのは、May-Leonard のモデルである。このモデルを知ったきっかけとして、Lotoka-Volterra 方程式(被食者・捕食者)は知っていたが、この方程式は、2種の生物の個体数の変動(被食者・捕食者の関係)を表したモデルで、3種の生物の個体数を表したモデルはないのかという疑問を持ったからである。ただ、May-Leonard のモデルでは、あくまで3種間の競争を相互に影響を及ぼしあっていることを示していて、外部の影響を加味していないモデルである。ここで疑問に思ったことが、3種間で影響を及ぼしあうことは明確であるが、外部の影響を加味した場合はどうなるのかということである。なので、今回私の研究の目的として、以下のような外部の影響(競争にさらされていない「聖域」からの供給)を考慮した May-Leonard のモデルを考え、同条件下で元の May-Leonard のモデルとはどのような差が生まれるのか検証していくことにした。「聖域」の意味は第5章で後述する。

- ・競争にさらされていない「聖域」からの供給を考慮した May-Leonard のモデル

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = c_1 + N_1(r_1 - \alpha_{11}N_1 - \alpha_{12}N_2 - \alpha_{13}N_3) \\ \frac{dN_2}{dt} = c_2 + N_2(r_2 - \alpha_{21}N_1 - \alpha_{22}N_2 - \alpha_{23}N_3) \\ \frac{dN_3}{dt} = c_3 + N_3(r_3 - \alpha_{31}N_1 - \alpha_{32}N_2 - \alpha_{33}N_3) \end{cases}$$

## 第2章 1種の生物における個体数の変動

まず、1種の生物における個体数の変動をみていく。

### 2.1 Malthusの法則

個体数の増減は、近似的に時間に関して連続的で、微分可能な関数で表されると仮定する。時間  $t$  における生物の個体数を  $p(t)$ 、生物の出生率と死亡率の差を  $r(t, p)$  とする。この生物の集団が、外部の影響 (ex, 集団外から別に生物が入ってくる) を受けない場合、個体数の変化率は、

$$\frac{dp(t)}{dt} = rp(t)$$

と表すことができる。最も単純なモデルでは、 $r$  を定数とすることができる。すなわち、変化率は時間や個体数に依存せず一定である。したがって、次のように表すことができる。

$$\frac{dp(t)}{dt} = ap(t), \quad a(> 0) = \text{定数}$$

これは、Malthusの法則として知られているものである。時間  $t = t_0$  における個体数を  $p(t_0) = p_0 > 0$  であるとする、 $p(t)$  は、微分方程式の初期値問題

$$\frac{dp(t)}{dt} = ap(t), \quad p(t_0) = p_0$$

を満たす。この初期値問題の解は、

$$p(t) = p_0 e^{a(t-t_0)}$$

である。Malthusの法則を満たす種では、時間とともに指数関数的に増減する。場合分けは以下通り。

$$\begin{cases} a > 0 \text{ のとき、増加} \\ a < 0 \text{ のとき、減少} \end{cases}$$

## 2.2 Logistic 方程式

Malthus の法則では、変化率  $dp/dt$  は、時間  $t$  における個体数に比例すると仮定している。しかし、変化率は、個体数の増加に伴って、一定ではなく、利用できる資源の減少や環境の悪化などが原因で減少すると仮定することが合理的である。このとき、 $r$  と  $K$  を正の定数として

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

と表される。これは、Logistic 方程式と知られているものである。 $r$  は内的自然増加率、 $K$  は環境収容力と呼ばれる。

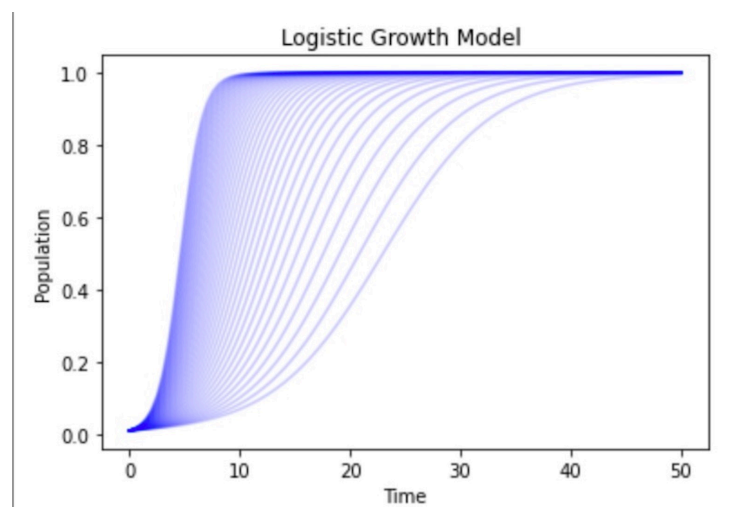
この解は、変数分離法で求めることができ、初期値を  $N(0) = N_0 (> 0)$  とすると、

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$$

と求めることができる。時間  $t$  における変化率  $dN/dt$  と個体数  $N(t)$  は、

$$\begin{cases} N > K \cdots \text{変化率は負} \Rightarrow \text{個体数は減少} \\ N < K \cdots \text{変化率は正} \Rightarrow \text{個体数は増加} \end{cases}$$

となる。



Logistic 方程式のシミュレーション

# 第3章 Lotoka-Volterra 方程式 (2種の生物における個体数の変動 (被食者・捕食者の関係))

次に、2種の生物が捕食者・被食者の関係にあるときの個体数の変動をみていく。  
被食者の個体数を  $x(t)$ 、捕食者の個体数を  $y(t)$ 、時間を  $t$  とおく。捕食者がいないとき、被食者の個体数は単位時間あたり  $a > 0$  の割合で増加し、被食者がいないとき、捕食者の個体数は単位時間あたり  $c > 0$  の割合で減少すると仮定する。捕食者と被食者の相互作用がなければ、 $x(t)$  と  $y(t)$  はそれぞれ、以下のような微分方程式となる。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = -cy \end{cases}$$

しかし、捕食者がいれば被食者の増加率は減り、被食者がいれば捕食者の増加率は増える。そこで、被食者1匹あたりの増加率  $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$  は捕食者の個体数に比例して減少し、捕食者1匹あたりの増加率  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$  は被食者の個体数に比例して増加すると仮定する。その比例定数を  $b, d > 0$  とすると、 $x(t)$  と  $y(t)$  はそれぞれ以下のような微分方程式となる。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases} \quad (3.1)$$

を Lotoka-Volterra 方程式と呼ぶ。

## 3.1 平衡点と安定性

まず、連立微分方程式 (3.1) の平衡点を求める。

$$\begin{cases} ax - bxy = 0 \\ -cy + dxy = 0 \end{cases}$$

これを解くと、 $(x, y) = (0, 0), \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  となる。平衡点  $(x, y) = (0, 0), \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  の安定性を調べるために、この方程式 (3.1) のヤコビ行列  $J(x, y)$  を求めておく。この方程式 (3.1) のヤコビ行列  $J(x, y)$  は、以下ようになる。

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{bmatrix}$$

2つの平衡点それぞれの場合の安定性を調べる。

- i.  $(x, y) = (0, 0)$  のとき、  
このときのヤコビ行列は、

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$$

となり、固有値  $\lambda = a, -c$  である。このとき、固有値は負であるので、この平衡点  $(0, 0)$  は、常に不安定である。

- ii.  $(x, y) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  のとき、  
このときのヤコビ行列は、

$$J\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & -c \end{bmatrix}$$

となり、固有値  $\lambda = \pm i\sqrt{ac}$  である。このとき、固有値の実部は0であるので、この平衡点  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  は、安定であるとも不安定であるとも言えない。

## 3.2 解軌道

(3.1) は、 $x(0) = x_0, y(0) = y_0$  とすると、

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{at} \\ y(t) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = y_0 e^{-ct} \end{cases}$$

という解を持つ。よって、 $x$  軸、 $y$  軸ともに (3.1) の解軌道である。  
 $x, y \neq 0$  のとき、(3.1) の解軌道は、

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy, \quad \frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$

より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-cy + dxy}{ax - bxy} = \frac{y(dx - c)}{x(a - by)}$$

の解曲線である。

これは、変数分離形の方程式なので、まず、

$$\frac{a - by}{y} dy = \frac{dx - c}{x} dx$$

という形に変形して、両辺積分する。

$$\int \frac{a - by}{y} dy = \int \frac{dx - c}{x} dx$$

これを解くと、

$$a \log y - by = dx - c \log x + k (k: \text{定数})$$

求めた方程式の指数を取り整理すると、

$$\frac{y^a}{e^{by}} \frac{x^c}{e^{dx}} = K (K = e^k)$$

となる。

よって、(3.1) の軌道は、上記で求めたものの曲線群である。この曲線群は、各々閉曲線となる。

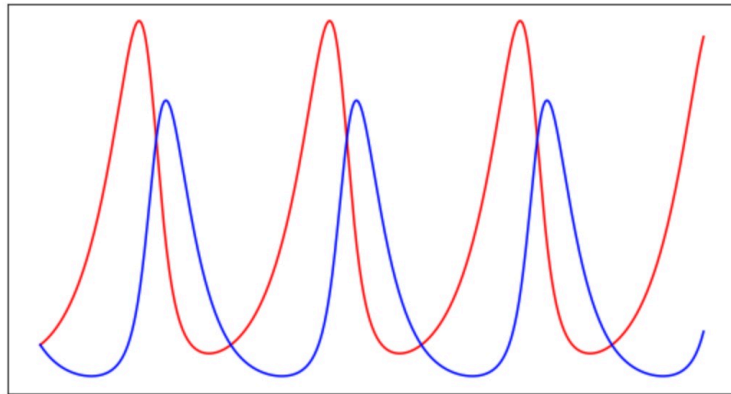


図 3.1: (3.1) の解の時間変化 (赤: $x$ , 青: $y$ )

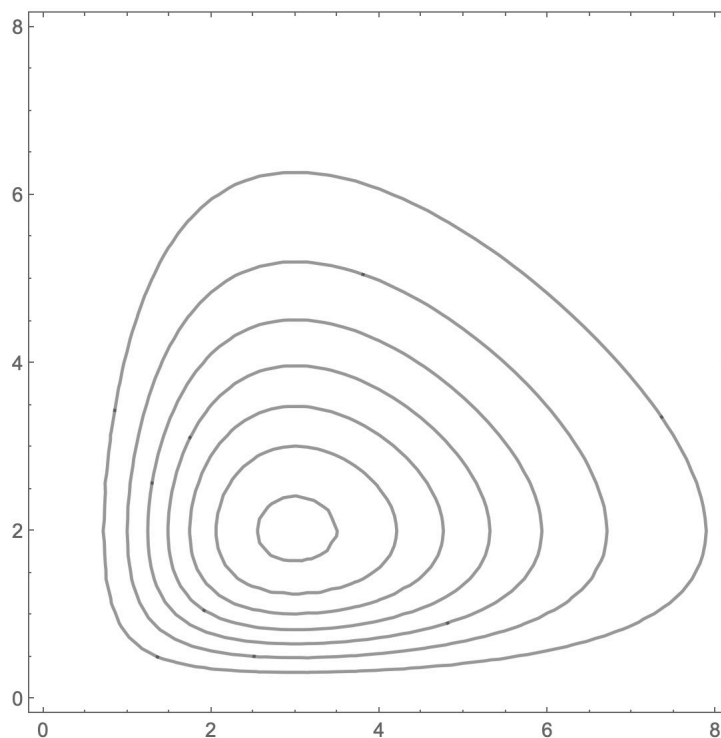


図 3.2: (3.1) の曲線群の軌道

## 第4章 May-Leonardのモデル (3種間の競争)

最後に、3種の生物における個体数の変動をみていく。May-Leonardのモデルは、下記のようなモデルである。

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(r_1 - \alpha_{11}N_1 - \alpha_{12}N_2 - \alpha_{13}N_3) \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(r_2 - \alpha_{21}N_1 - \alpha_{22}N_2 - \alpha_{23}N_3) \\ \frac{dN_3}{dt} = N_3(r_3 - \alpha_{31}N_1 - \alpha_{32}N_2 - \alpha_{33}N_3) \end{cases} \quad (4.1)$$

- i.  $N_i (i = 1, 2, 3)$ は*i*番目の種類の個体数、 $\Omega = \{(N_1, N_2, N_3); N_1 \geq 0, N_2 \geq 0, N_3 \geq 0\}$
- ii.  $r_i (i = 1, 2, 3)$ は内的自然増加率、今回は、 $r_i (i = 1, 2, 3) = 1$ とする。
- iii.  $\alpha, \beta$ は競争率 (正の定数)、 $t$ は時間を表す。  
今回は簡単にするため、 $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33} = 1, \alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31} = \alpha, \alpha_{13}, \alpha_{21}, \alpha_{32} = \beta$ とする。

上記より、(4.1)は、以下のように書き換えられる。

$$f(N_1, N_2, N_3) = \begin{pmatrix} N_1(1 - N_1 - \alpha N_2 - \beta N_3) \\ N_2(1 - \beta N_1 - N_2 - \alpha N_3) \\ N_3(1 - \alpha N_1 - \beta N_2 - N_3) \end{pmatrix}$$

## 4.1 平衡点

まず、平衡点を求める。

$$\begin{cases} N_1(1 - N_1 - \alpha N_2 - \beta N_3) = 0 \\ N_2(1 - \beta N_1 - N_2 - \alpha N_3) = 0 \\ N_3(1 - \alpha N_1 - \beta N_2 - N_3) = 0 \end{cases}$$

を解けばよい。解くと、8つの平衡点を得る。何種が生き残るかで場合分けをして整理していくと以下ようになる。

i. 0種  $(N_1, N_2, N_3) = (0, 0, 0)$

ii. 1種  $(N_1, N_2, N_3) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$

iii. 2種  $(N_1, N_2, N_3) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}, \frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}, 0\right), \left(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}, 0, \frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}\right), \left(0, \frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}, \frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}\right)$

iv. 3種  $(N_1, N_2, N_3) = \frac{1}{\alpha+\beta+1}(1, 1, 1)$

ここで、 $E_0 = (0, 0, 0)$ ,  $E_1 = (1, 0, 0)$ ,  $E_2 = (0, 1, 0)$ ,  $E_3 = (0, 0, 1)$ ,  $E_4 = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}, \frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}, 0\right)$ ,  $E_5 = \left(\frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}, 0, \frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}\right)$ ,  $E_6 = \left(0, \frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}, \frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}\right)$ ,  $E_7 = \frac{1}{\alpha+\beta+1}(1, 1, 1)$  とする。

## 4.2 平衡点の安定性

$f$  のヤコビ行列  $J(N_1, N_2, N_3)$  は、

$$J(N_1, N_2, N_3) = \begin{bmatrix} 1 - 2N_1 - \alpha N_2 - \beta N_3 & -\alpha N_1 & -\beta N_3 \\ -\beta N_2 & 1 - \beta N_1 - 2N_2 - \alpha N_3 & -\alpha N_2 \\ -\alpha N_3 & -\beta N_3 & 1 - \alpha N_1 - \beta N_2 - 2N_3 \end{bmatrix}$$

となる。

i. 0種の平衡点  $E_0 = (0, 0, 0)$  場合

このときのヤコビ行列は、

$$J(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となり、固有値は、 $\lambda = 1$  である。このとき、固有値は、正であるので常に不安定である。

ii. 1種の平衡点  $E_1 = (1, 0, 0)$  の場合

このときのヤコビ行列は、

$$J(1, 0, 0) = \begin{bmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 1 - \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{bmatrix}$$

となり、固有値は、 $\lambda = -1, 1 - \beta, 1 - \alpha$  である。

このとき、

$$\begin{cases} \alpha > 1 \wedge \beta > 1 \Rightarrow \text{固有値は全て負であるので、安定} \\ 0 < \alpha < 1 \vee 0 < \beta < 1 \Rightarrow \text{正の固有値が存在するので、不安定} \end{cases}$$

$E_2, E_3$  の場合も同様である。

iii. 2種  $E_4 = \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha\beta - 1}, \frac{\beta - 1}{\alpha\beta - 1}, 0 \right)$

このときのヤコビ行列は、

$$J \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha\beta - 1}, \frac{\beta - 1}{\alpha\beta - 1}, 0 \right) = \frac{1}{\alpha\beta - 1} \begin{bmatrix} 1 - \alpha & -\alpha^2 + \alpha & -\alpha\beta + \beta \\ -\beta^2 + \beta & 1 - \beta & -\alpha\beta + \beta \\ 0 & 0 & -\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta + \alpha + \beta - 1 \end{bmatrix}$$

となる。ここで、

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & -\alpha^2 + \alpha & -\alpha\beta + \beta \\ -\beta^2 + \beta & 1 - \beta & -\alpha\beta + \beta \\ 0 & 0 & -\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta + \alpha + \beta - 1 \end{bmatrix}$$

とする。この行列の固有値  $\lambda'$  を求める。ただし、 $E$  は単位行列である。

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda'E) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \alpha - \lambda' & -\alpha^2 + \alpha & -\alpha\beta + \beta \\ -\beta^2 + \beta & 1 - \beta - \lambda' & -\alpha\beta + \beta \\ 0 & 0 & -\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta + \alpha + \beta - 1 - \lambda' \end{pmatrix} \\ &= (1 - \alpha - \lambda')(1 - \beta - \lambda')(-\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta + \alpha + \beta - 1 - \lambda') \\ &\quad - (-\alpha^2 + \alpha)(-\beta^2 + \beta)(-\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta + \alpha + \beta - 1 - \lambda') \\ &= (\lambda' - (1 - \alpha\beta))(\lambda' - (1 - \alpha)(1 - \beta))((-\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta + \alpha + \beta - 1) - \lambda') = 0 \end{aligned}$$

よって、この行列  $A$  の固有値  $\lambda'$  は、 $\lambda' = 1 - \alpha\beta, (1 - \alpha)(1 - \beta), -\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta + \alpha + \beta - 1$

したがって、ヤコビ行列の固有値は、 $\lambda = -1, \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)}{\alpha\beta - 1}, \frac{-1 + \alpha - \alpha^2 + \beta - \beta^2 + \alpha\beta}{\alpha\beta - 1}$

である。左から  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  とする。

ここからそれぞれの $\lambda$ について符号を調べていく。

・ $\lambda_2$ について  
分子が正の場合

$$\begin{cases} 1 > \alpha \wedge 1 > \beta \\ 1 < \alpha \wedge 1 < \beta \end{cases}$$

分子が負の場合

$$\begin{cases} 1 > \alpha \wedge 1 < \beta \\ 1 < \alpha \wedge 1 > \beta \end{cases}$$

分母は

$$\begin{cases} 1 < \alpha\beta \cdots \text{正} \\ 1 > \alpha\beta \cdots \text{負} \end{cases}$$

以上の場合を踏まえて、 $\lambda_2$ の符号を図にまとめると以下の通り。

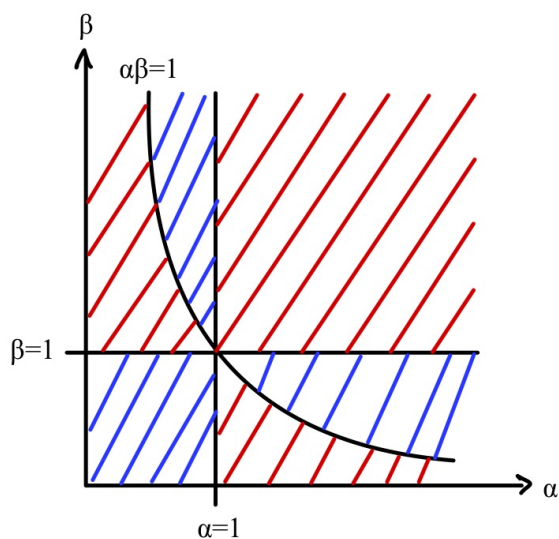


図 4.1: 赤斜線: $\lambda_2 > 0$ 、青斜線: $\lambda_2 < 0$

・ $\lambda_3$ について まず、分子についてみていく。

$f(\alpha, \beta) = -1 + \alpha - \alpha^2 + \beta - \beta^2 + \alpha\beta$  とする。 $\alpha, \beta$  で偏微分する。

$f_\alpha(\alpha, \beta) = 1 - 2\alpha + \beta$ ,  $f_\beta(\alpha, \beta) = 1 + \alpha - 2\beta$  より、

$$\begin{cases} 1 - 2\alpha + \beta = 0 \\ 1 + \alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$

上記の連立方程式を解くと、 $(\alpha, \beta) = (1, 1)$  である。したがって、 $(\alpha, \beta) = (1, 1)$  のときのヘッセ行列  $H(\alpha, \beta)$  は、

$$H(1, 1) = \begin{bmatrix} f_{\alpha\alpha}(1, 1) & f_{\beta\alpha}(1, 1) \\ f_{\alpha\beta}(1, 1) & f_{\beta\beta}(1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

この行列  $H$  の固有値は、 $\lambda = -1, -3$  である。

また、 $f(\alpha, \beta)$  を平方完成すると、 $f(\alpha, \beta) = -\left(\alpha - \frac{\beta+1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}(\beta-1)^2$  となる。よって、 $f(\alpha, \beta) \leq 0$  であるので、 $f(\alpha, \beta) = (1, 1)$  で極大値および最大値  $f(1, 1) = 0$  をとる。以上より 2 種の平衡点が安定 (固有値が負) する場合は、

$$\begin{cases} \alpha < 1 \wedge \alpha\beta > 1 \\ \beta < 1 \wedge \alpha\beta > 1 \end{cases}$$

ここで、平衡点  $E_4 = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}, \frac{\beta-1}{\alpha\beta-1}, 0\right)$  の存在条件を調べる。 $\Omega = \{(N_1, N_2, N_3); N_1 \geq 0, N_2 \geq 0, N_3 \geq 0\}$  に属するには、以下のいずれかの条件が必要になる。

$$\begin{cases} \alpha, \beta \geq 1 \wedge \alpha\beta > 1 \\ \alpha, \beta \leq 1 \wedge \alpha\beta < 1 \end{cases}$$

したがって、上記の条件下では、2 種の平衡点が負になることがあるので、2 種の平衡点は常に不安定ということになる。

また、 $E_5, E_6$  の場合も同様である。下図は、2 種の平衡点の安定性と存在範囲を示したものである。

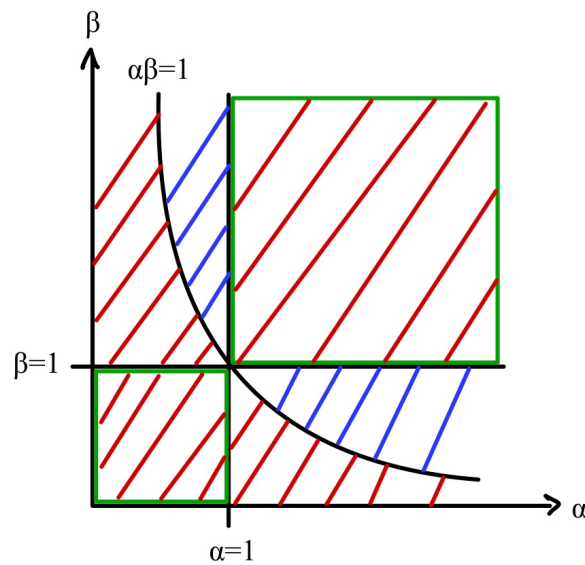


図 4.2: 赤斜線:不安定、青斜線:安定、緑枠:存在範囲

iv. 3 種の場合  $(N_1, N_2, N_3) = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}(1, 1, 1)$

このときのヤコビ行列は、

$$J\left(\frac{1}{\alpha + \beta + 1}(1, 1, 1)\right) = \frac{1}{\alpha + \beta + 1} \begin{bmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ -\beta & -1 & -\alpha \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{bmatrix}$$

となる。ここで、

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ -\beta & -1 & -\alpha \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{bmatrix}$$

とする。この行列の固有値  $\lambda'$  を求める。ただし、 $E$  は単位行列である。

$$\begin{aligned}
 \det(A - \lambda'E) &= \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda' & -\alpha & -\beta \\ -\beta & -1 - \lambda' & -\alpha \\ -\alpha & -\beta & -1 - \lambda' \end{pmatrix} \\
 &= (-1 - \lambda')(-1 - \lambda')(-1 - \lambda') - \beta^3 - \alpha^3 - 3\alpha\beta(-1 - \lambda') \\
 &= -((\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + (1 + \lambda')^3 - 3\alpha\beta(1 + \lambda')) \\
 &= -((\lambda' + \alpha + \beta + 1)((\alpha + \beta)^2 - (\lambda' + 1)(\alpha + \beta) + (\lambda' + 1)^2) - 3\alpha\beta(\lambda' + \alpha + \beta + 1)) \\
 &= -((\lambda' + \alpha + \beta + 1)((\lambda' + 1)^2 - (\lambda' + 1)(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta) \\
 &= -((\lambda' + \alpha + \beta + 1)((\lambda' + 1)^2 - \lambda'(\alpha + \beta) + \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 - \alpha - \beta) \\
 &= -((\lambda' + \alpha + \beta + 1)(\lambda'^2 - \lambda'(\alpha + \beta - 2) + \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 - \alpha - \beta + 1)) = 0
 \end{aligned}$$

よって、この行列  $A$  の固有値  $\lambda'$  は、 $\lambda' = -(\alpha + \beta + 1), \frac{(\alpha + \beta - 2 \pm \sqrt{3}(\alpha - \beta))i}{2}$

固有値は、 $\lambda = -1, \frac{\alpha + \beta - 2 \pm \sqrt{3}(\alpha - \beta)i}{2(\alpha + \beta + 1)}$  となる。

このとき、

$$\begin{cases} \alpha + \beta > 2 \Rightarrow \text{固有値の実部が正になるので、不安定} \\ \alpha + \beta < 2 \Rightarrow \text{固有値の実部が負になるので、安定} \end{cases}$$

### 4.3 $\alpha + \beta = 2$ の場合

4.2 iv で、3 種平衡点の安定性について  $\alpha + \beta = 2$  はどうなるのか言及していないのでそれについて言及していく。 $\alpha + \beta = 2$  のときは、周期的な解 (limit cycle) が得られることが知られている。解は、以下のような図となる。

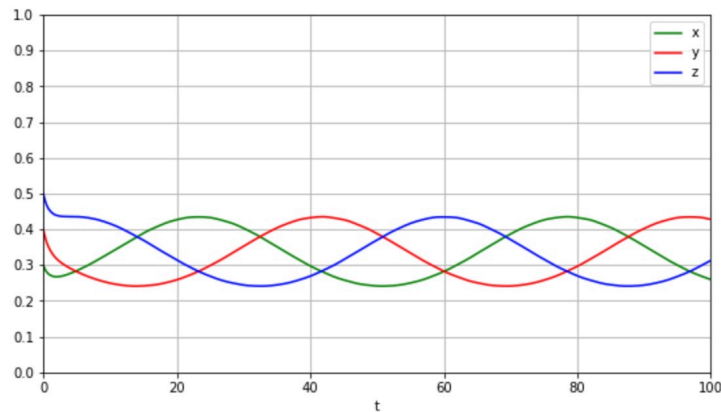


図 4.3:  $\alpha + \beta = 2$  の場合 ( $\alpha = 1.2, \beta = 0.8$ )

## 4.4 まとめ

以上より平衡点の安定性をまとめると、

i. 0種の場合  $\Rightarrow$  常に不安定

ii. 1種の場合

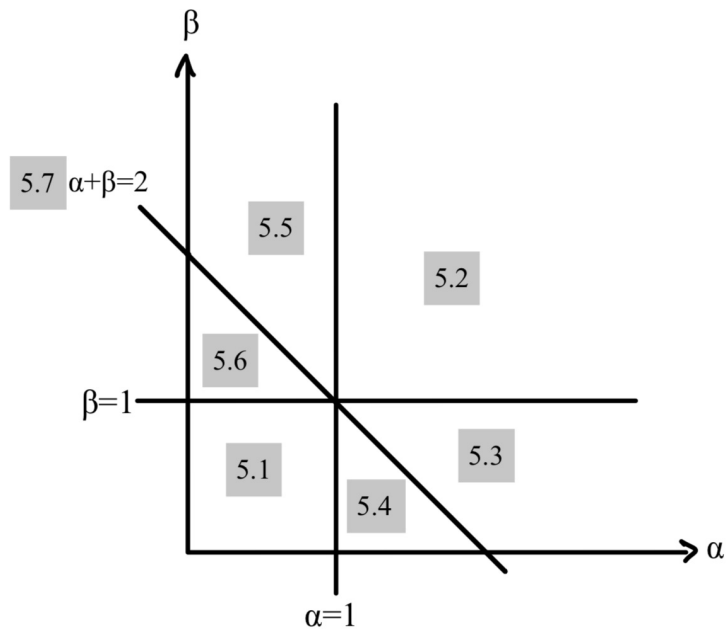
$$\begin{cases} \alpha > 1 \wedge \beta > 1 \Rightarrow \text{固有値は全て負であるので、安定} \\ 0 < \alpha < 1 \vee 0 < \beta < 1 \Rightarrow \text{正の固有値が存在するので、不安定} \end{cases}$$

iii. 2種の場合  $\Rightarrow$  以下の存在条件下に平衡点が安定となる条件を満たすものはない  $\therefore$  不安定

$$\begin{cases} \alpha, \beta \geq 1 \wedge \alpha\beta > 1 \\ \alpha, \beta \leq 1 \wedge \alpha\beta < 1 \end{cases}$$

iv. 3種の場合

$$\begin{cases} \alpha + \beta > 2 \Rightarrow \text{固有値の実部が正になるので、不安定} \\ \alpha + \beta < 2 \Rightarrow \text{固有値の実部が負になるので、安定} \end{cases}$$



まとめ

平衡点の安定性について  $(\alpha, \beta)$  の範囲ごとに分類しておく。

(5.1) 1,2種平衡点は不安定、3種平衡点安定

(5.2) 1種平衡点は安定、2,3種平衡点は不安定

(5.3) 1,3種平衡点は不安定、2種平衡点は不存在

(5.4) 1種平衡点は不安定、2種平衡点は不存在、3種平衡点は安定

(5.5) 1,3種平衡点は不安定、2種平衡点は不存在

(5.6) 1種平衡点は不安定、2種平衡点は不存在、3種平衡点は安定

(5.7)  $\alpha + \beta = 2$  では、周期的な解 (limit cycle) が存在する。

# 第5章 May-Leonardのモデルと聖域からの供給を考慮したMay-Leonardのモデルの比較

今回、魚種交替と呼ばれる現象について知る機会があった。マイワシ、カタクチイワシ、マサバの3種類の浮魚類(海の表層に住み、プランクトンを食べる魚)の個体数は、数十年単位で変動し、沖合ではどれか1種だけが分布を広げている。優占する魚種が交替することを魚種交替という。この魚種交替という現象を3すくみの競争関係にある力学系のモデルで説明できるという仮説が出された([5], [9])。そのモデルとMay-Leonardのモデルとの大きな違いは、競争にさらされていない「聖域」からの供給効果を導入していることだと考えられる。そこで、May-Leonardのモデルに聖域からの供給を考慮したモデルを考え、同条件でMay-Leonardのモデルと違いはどの程度出てくるのか比較しようと思う。

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = c_1 + N_1(r_1 - \alpha_{11}N_1 - \alpha_{12}N_2 - \alpha_{13}N_3) \\ \frac{dN_2}{dt} = c_2 + N_2(r_2 - \alpha_{21}N_1 - \alpha_{22}N_2 - \alpha_{23}N_3) \\ \frac{dN_3}{dt} = c_3 + N_3(r_3 - \alpha_{31}N_1 - \alpha_{32}N_2 - \alpha_{33}N_3) \end{cases} \quad (5.1)$$

(5.1) を2パターン考えて比較していく。  $\Omega = \{(N_1, N_2, N_3); N_1 \geq 0, N_2 \geq 0, N_3 \geq 0\}$

(5a) May-Leonardのモデル ( $c_i(i = 1, 2, 3) = 0, r_i(i = 1, 2, 3) = 1$ )

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(1 - N_1 - \alpha N_2 - \beta N_3) \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(1 - \beta N_1 - N_2 - \alpha N_3) \\ \frac{dN_3}{dt} = N_3(1 - \alpha N_1 - \beta N_2 - N_3) \end{cases}$$

(5b) 聖域からの供給を考慮したMay-Leonardのモデル ( $c_1 = c_2 = c_3 = c, r_i(i = 1, 2, 3) = 1$ )

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = c + N_1(1 - N_1 - \alpha N_2 - \beta N_3) \\ \frac{dN_2}{dt} = c + N_2(1 - \beta N_1 - N_2 - \alpha N_3) \\ \frac{dN_3}{dt} = c + N_3(1 - \alpha N_1 - \beta N_2 - N_3) \end{cases}$$

シミュレーション結果の中で  $x, y, z$  と出てくるが、 $N_1, N_2, N_3$  のことである。

具体的に比較していく内容として、存在する平衡点の個数と初期値を平衡点の近傍から動かすシミュレーションをしてその結果を確認していく。以下の図のような場合で比較する。(5a)の平衡点の安定性と存在範囲を示しておく。

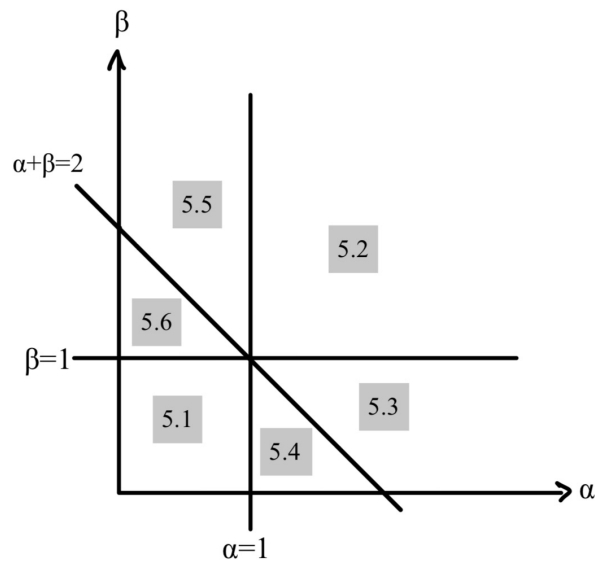


図 5.1: 場合分け

- (5.1)  $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$  1,2種平衡点は不安定、3種平衡点安定
- (5.2)  $\alpha > 1 \wedge \beta > 1$  1種平衡点は安定、2,3種平衡点は不安定
- (5.3)  $\alpha > 1 \wedge \beta < 1 \wedge \alpha + \beta > 2$  1,3種平衡点は不安定、2種平衡点は不存在
- (5.4)  $\alpha > 1 \wedge \beta < 1 \wedge \alpha + \beta < 2$  1種平衡点は不安定、2種平衡点は不存在、3種平衡点は安定
- (5.5)  $\alpha < 1 \wedge \beta > 1 \wedge \alpha + \beta > 2$  1,3種平衡点は不安定、2種平衡点は不存在
- (5.6)  $\alpha < 1 \wedge \beta > 1 \wedge \alpha + \beta < 2$  1種平衡点は不安定、2種平衡点は不存在、3種平衡点は安定

上記で、2種平衡点は不存在という記述があるが、それは、 $\Omega$ 内に存在していないということである。

(5b)のモデルを第4章で調べた(5a)と同じように解析することはできない。以下では、比較の仕方として、パラメーターに具体的な値を代入した方程式について平衡点の存在・不存在を調べ、数値シミュレーションにより解の性質を調べることで議論する。

## 5.1 $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ のとき

このとき、 $0 < \alpha + \beta < 2$  が成り立つ。 $\alpha = 0.6, \beta = 0.7, c = 0.05$  として計算した。

### 5.1.1 平衡点と安定性について

(5a)  $c_i (i = 1, 2, 3) = 0, r_i (i = 1, 2, 3) = 1$

⇒ 平衡点 8 個であり計算結果は以下の通り。

$\{x \rightarrow 0.689655, y \rightarrow 0.517241, z \rightarrow 0.\}, \{x \rightarrow 0., y \rightarrow 1., z \rightarrow 0.\},$   
 $\{x \rightarrow 1., y \rightarrow 0., z \rightarrow 0.\}, \{x \rightarrow 0., y \rightarrow 0., z \rightarrow 1.\}, \{x \rightarrow 0.434783, y \rightarrow 0.434783, z \rightarrow 0.434783\},$   
 $\{x \rightarrow 0., y \rightarrow 0.689655, z \rightarrow 0.517241\}, \{x \rightarrow 0.517241, y \rightarrow 0., z \rightarrow 0.689655\}, \{x \rightarrow 0., y \rightarrow 0., z \rightarrow 0.\}$

(5a) 計算結果 No.1

(5b)  $c_1 = c_2 = c_3 = c, r_i (i = 1, 2, 3) = 1$

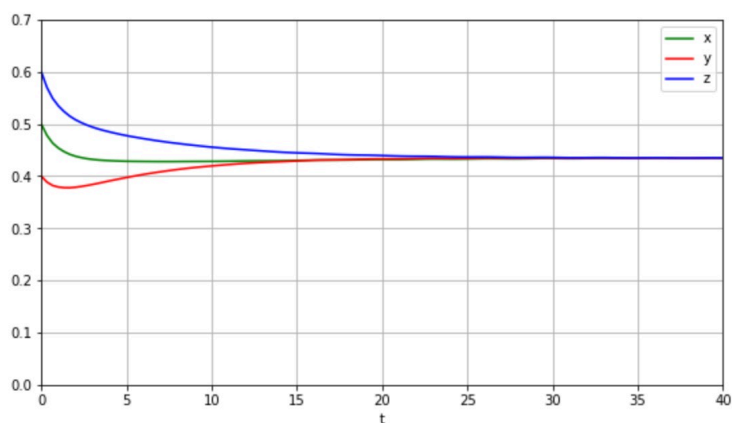
⇒ 平衡点 8 個存在するが、そのうち 7 個は座標に負の数があり、 $\Omega$ 内に存在する平衡点は 1 個のみである。計算結果は以下の通り。

$\{x \rightarrow 0.822309, y \rightarrow 0.619126, z \rightarrow -0.189971\}, \{x \rightarrow -0.138032, y \rightarrow -0.103727, z \rightarrow 1.19719\},$   
 $\{x \rightarrow -0.103727, y \rightarrow 1.19719, z \rightarrow -0.138032\}, \{x \rightarrow 1.19719, y \rightarrow -0.138032, z \rightarrow -0.103727\},$   
 $\{x \rightarrow 0.480066, y \rightarrow 0.480066, z \rightarrow 0.480066\}, \{x \rightarrow 0.619126, y \rightarrow -0.189971, z \rightarrow 0.822309\},$   
 $\{x \rightarrow -0.189971, y \rightarrow 0.822309, z \rightarrow 0.619126\}, \{x \rightarrow -0.0452836, y \rightarrow -0.0452836, z \rightarrow -0.0452836\}$

(5b) 計算結果 No.1

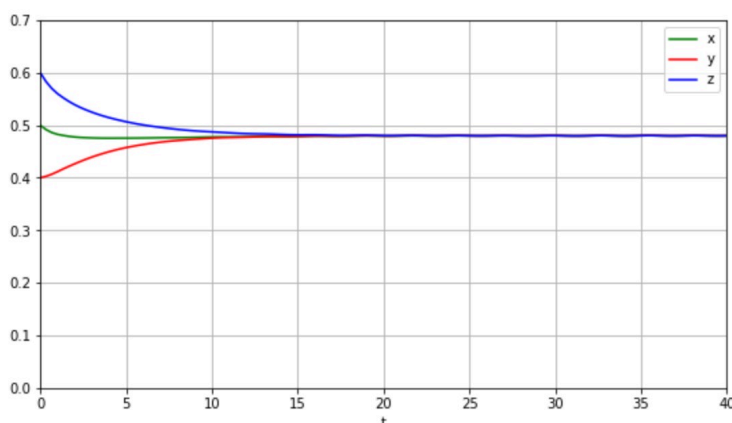
## 5.1.2 シミュレーションについて

(5a)  $c_i(i = 1, 2, 3) = 0, r_i(i = 1, 2, 3) = 1$



(5a)

(5b)  $c_1 = c_2 = c_3 = c, r_i(i = 1, 2, 3) = 1$



(5b)

考察 どちらの場合も、時間が経過すると3種平衡点に収束した。3種平衡点は、(5a)については第4章で漸近安定と証明できているが、(5b)についても漸近安定であると推測できる。

以上のことをまとめると、以下の表のようになる。

表 5.1: 安定性

平衡点	May-Leonard(5a)	聖域考慮 ver(5b)
0種	不安定	存在しない
1種	不安定	存在しない
2種	不安定	存在しない
3種	安定	安定

## 5.2 $\alpha > 1 \wedge \beta > 1$ のとき

$\alpha = 2.0, \beta = 1.2, c = 0.05$  として計算した。

### 5.2.1 平衡点と安定性について

(5a)  $c_i (i = 1, 2, 3) = 0, r_i (i = 1, 2, 3) = 1$

⇒ 平衡点 8 個であり計算結果は以下の通り。

$\{\{x \rightarrow 0., y \rightarrow 1., z \rightarrow 0.\}, \{x \rightarrow 1., y \rightarrow 0., z \rightarrow 0.\}, \{x \rightarrow 0., y \rightarrow 0., z \rightarrow 1.\},$   
 $\{x \rightarrow 0.714286, y \rightarrow 0.142857, z \rightarrow 0.\}, \{x \rightarrow 0., y \rightarrow 0.714286, z \rightarrow 0.142857\},$   
 $\{x \rightarrow 0.142857, y \rightarrow 0., z \rightarrow 0.714286\}, \{x \rightarrow 0.238095, y \rightarrow 0.238095, z \rightarrow 0.238095\}, \{x \rightarrow 0., y \rightarrow 0., z \rightarrow 0.\}\}$

(5a) 計算結果 No.2

(5b)  $c_1 = c_2 = c_3 = c, r_i (i = 1, 2, 3) = 1$

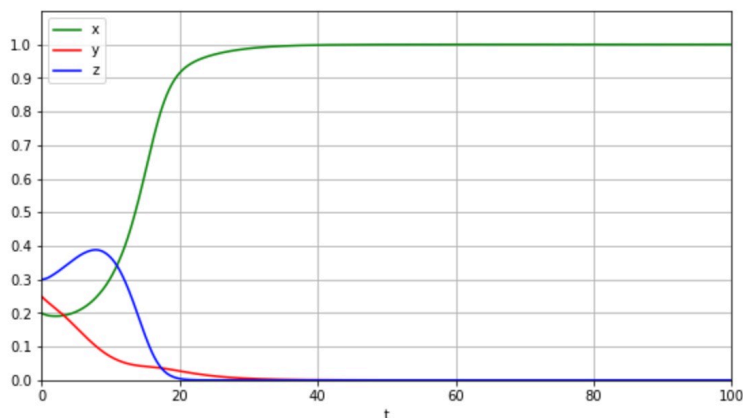
⇒ 平衡点 8 個存在するが、そのうち 1 個は座標に負の数があり、また、6 個は虚数のものがあるので、 $\Omega$ 内に存在する平衡点は 1 個のみである。計算結果は以下の通り。

$\{\{x \rightarrow 0.0475571 + 0.0324351 i, y \rightarrow 0.766008 - 0.366963 i, z \rightarrow 0.115007 + 0.176737 i\},$   
 $\{x \rightarrow 0.0475571 - 0.0324351 i, y \rightarrow 0.766008 + 0.366963 i, z \rightarrow 0.115007 - 0.176737 i\},$   
 $\{x \rightarrow 0.766008 - 0.366963 i, y \rightarrow 0.115007 + 0.176737 i, z \rightarrow 0.0475571 + 0.0324351 i\},$   
 $\{x \rightarrow 0.766008 + 0.366963 i, y \rightarrow 0.115007 - 0.176737 i, z \rightarrow 0.0475571 - 0.0324351 i\},$   
 $\{x \rightarrow 0.115007 - 0.176737 i, y \rightarrow 0.0475571 - 0.0324351 i, z \rightarrow 0.766008 + 0.366963 i\},$   
 $\{x \rightarrow 0.115007 + 0.176737 i, y \rightarrow 0.0475571 + 0.0324351 i, z \rightarrow 0.766008 - 0.366963 i\},$   
 $\{x \rightarrow 0.280532, y \rightarrow 0.280532, z \rightarrow 0.280532\}, \{x \rightarrow -0.0424364, y \rightarrow -0.0424364, z \rightarrow -0.0424364\}\}$

(5b) 計算結果 No.2

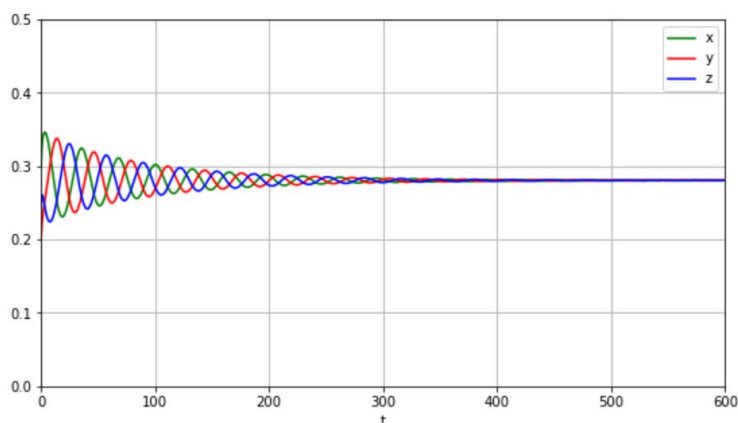
## 5.2.2 シミュレーションについて

(5a)  $c_i(i = 1, 2, 3) = 0, r_i(i = 1, 2, 3) = 1$



(5a)

(5b)  $c_1 = c_2 = c_3 = c, r_i(i = 1, 2, 3) = 1$



(5b)

考察 (5a) は、時間が経過すると 1 種平衡点に収束し、(5b) は、時間が経過すると、3 種平衡点に収束した。1 種平衡点は、(5a) については第 4 章で漸近安定と証明できている。3 種平衡点は、(5b) については、シミュレーション結果より漸近安定であると推測できる。

以上のことをまとめると、以下の表のようになる。

表 5.2: 安定性

平衡点	May-Leonard(5a)	聖域考慮 ver(5b)
0 種	不安定	存在しない
1 種	安定	存在しない
2 種	不安定	存在しない
3 種	不安定	安定

### 5.3 $\alpha > 1 \wedge \beta < 1 \wedge \alpha + \beta > 2$ のとき

$\alpha = 1.3, \beta = 0.8, c = 0.05$  として計算した。

#### 5.3.1 平衡点と安定性について

(5a)  $c_i (i = 1, 2, 3) = 0, r_i (i = 1, 2, 3) = 1$

⇒ 平衡点 8 個求められるが、2 種平衡点の 3 つが負となるので、 $\Omega$ 内に存在する平衡点のは 5 個である。計算結果は以下の通り。

$\{(x \rightarrow 0., y \rightarrow 7.5, z \rightarrow -5.), \{x \rightarrow -5., y \rightarrow 0., z \rightarrow 7.5\}, \{x \rightarrow 7.5, y \rightarrow -5., z \rightarrow 0.\}, \{x \rightarrow 0., y \rightarrow 1., z \rightarrow 0.\},$   
 $\{x \rightarrow 1., y \rightarrow 0., z \rightarrow 0.\}, \{x \rightarrow 0., y \rightarrow 0., z \rightarrow 1.\}, \{x \rightarrow 0.322581, y \rightarrow 0.322581, z \rightarrow 0.322581\}, \{x \rightarrow 0., y \rightarrow 0., z \rightarrow 0.\}\}$

(5a) 計算結果 No.3

(5b)  $c_1 = c_2 = c_3 = c, r_i (i = 1, 2, 3) = 1$

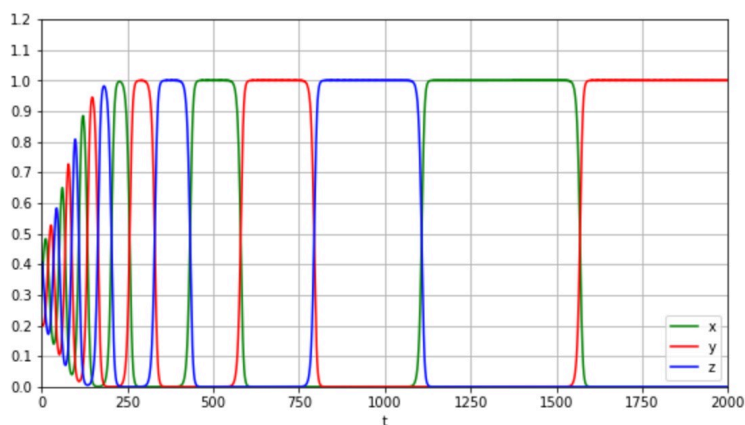
⇒ 平衡点 8 個存在するが、そのうち 7 個は座標に負の数があり、 $\Omega$ 内に存在する平衡点 は 1 個のみである。計算結果は以下の通り。

$\{(x \rightarrow 0.0119155, y \rightarrow 6.67555, z \rightarrow -4.36738), \{x \rightarrow -4.36738, y \rightarrow 0.0119155, z \rightarrow 6.67555\},$   
 $\{x \rightarrow 6.67555, y \rightarrow -4.36738, z \rightarrow 0.0119155\}, \{x \rightarrow 0.0678089, y \rightarrow 1.55975, z \rightarrow -0.447647\},$   
 $\{x \rightarrow -0.447647, y \rightarrow 0.0678089, z \rightarrow 1.55975\}, \{x \rightarrow 1.55975, y \rightarrow -0.447647, z \rightarrow 0.0678089\},$   
 $\{x \rightarrow 0.366579, y \rightarrow 0.366579, z \rightarrow 0.366579\}, \{x \rightarrow -0.0439987, y \rightarrow -0.0439987, z \rightarrow -0.0439987\}\}$

(5b) 計算結果 No.3

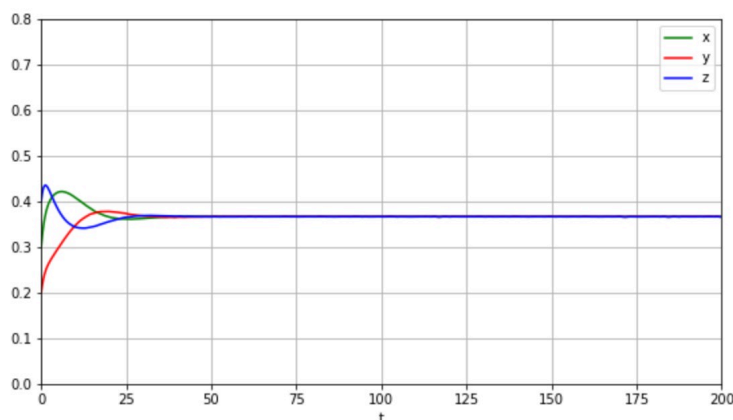
### 5.3.2 シミュレーションについて

(5a)  $c_i(i = 1, 2, 3) = 0, r_i(i = 1, 2, 3) = 1$



(5a)

(5b)  $c_1 = c_2 = c_3 = c, r_i(i = 1, 2, 3) = 1$



(5b)

考察 そもそもこの場合だと、(5a)では1種でも3種でも不安定となり、図の通り平衡点に近づくほど、平衡点近傍での滞在時間が長くなっている。3種平衡点は、(5b)については、シミュレーション結果より漸近安定であると推測できる。

以上のことをまとめると、以下の表のようになる。

表 5.3: 安定性

平衡点	May-Leonard(5a)	聖域考慮 ver(5b)
0種	不安定	存在しない
1種	不安定	存在しない
2種	存在しない	存在しない
3種	不安定	安定

## 5.4 $\alpha > 1 \wedge \beta < 1 \wedge \alpha + \beta < 2$ のとき

$\alpha = 1.2, \beta = 0.7, c = 0.05$  として計算した。

### 5.4.1 平衡点と安定性について

(5a)  $c_i (i = 1, 2, 3) = 0, r_i (i = 1, 2, 3) = 1$

⇒ 平衡点 8 個求められるが、2 種平衡点の 3 つが負となるので、 $\Omega$ 内に存在する平衡点のは 5 個である。計算結果は以下の通り。

$\{\{x \rightarrow 1.875, y \rightarrow 0., z \rightarrow -1.25\}, \{x \rightarrow 0., y \rightarrow -1.25, z \rightarrow 1.875\},$   
 $\{x \rightarrow 0., y \rightarrow 1., z \rightarrow 0.\}, \{x \rightarrow 1., y \rightarrow 0., z \rightarrow 0.\}, \{x \rightarrow 0., y \rightarrow 0., z \rightarrow 1.\},$   
 $\{x \rightarrow -1.25, y \rightarrow 1.875, z \rightarrow 0.\}, \{x \rightarrow 0.344828, y \rightarrow 0.344828, z \rightarrow 0.344828\}, \{x \rightarrow 0., y \rightarrow 0., z \rightarrow 0.\}\}$

(5a) 計算結果 No.4

(5b)  $c_1 = c_2 = c_3 = c, r_i (i = 1, 2, 3) = 1$

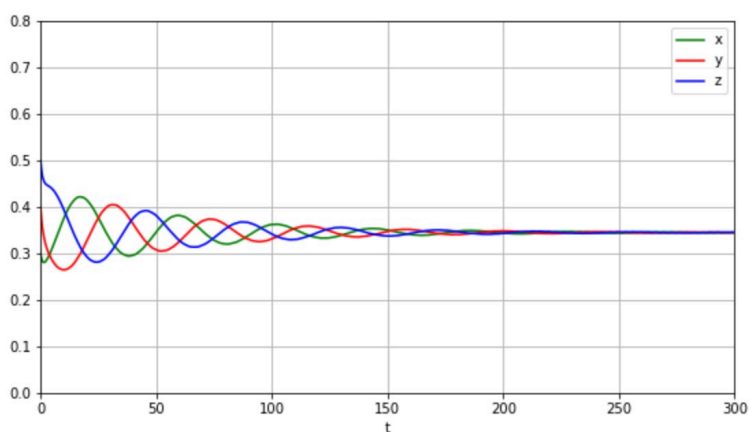
⇒ 平衡点 8 個存在するが、そのうち 7 個は座標に負の数があり、 $\Omega$ 内に存在する平衡点は 1 個のみである。計算結果は以下の通り。

$\{\{x \rightarrow -0.032709, y \rightarrow -1.74469, z \rightarrow 2.28244\}, \{x \rightarrow 2.28244, y \rightarrow -0.032709, z \rightarrow -1.74469\},$   
 $\{x \rightarrow 0.115746, y \rightarrow 1.22657, z \rightarrow -0.222358\}, \{x \rightarrow -0.222358, y \rightarrow 0.115746, z \rightarrow 1.22657\},$   
 $\{x \rightarrow 1.22657, y \rightarrow -0.222358, z \rightarrow 0.115746\}, \{x \rightarrow -1.74469, y \rightarrow 2.28244, z \rightarrow -0.032709\},$   
 $\{x \rightarrow 0.389135, y \rightarrow 0.389135, z \rightarrow 0.389135\}, \{x \rightarrow -0.044307, y \rightarrow -0.044307, z \rightarrow -0.044307\}\}$

(5b) 計算結果 No.4

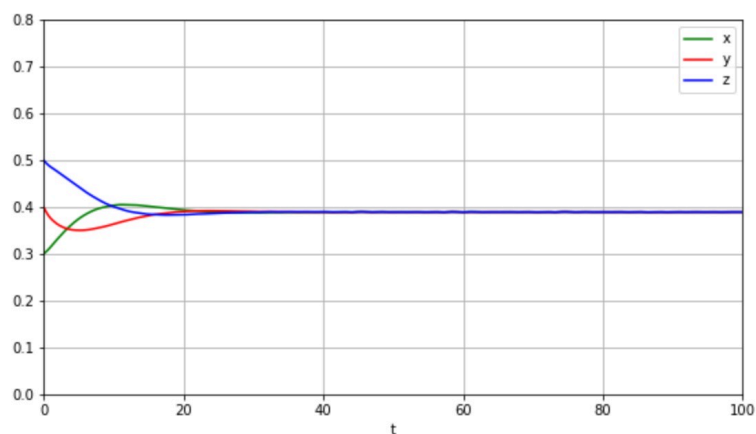
## 5.4.2 シミュレーションについて

(5a)  $c_i(i = 1, 2, 3) = 0, r_i(i = 1, 2, 3) = 1$



(5a)

(5b)  $c_1 = c_2 = c_3 = c, r_i(i = 1, 2, 3) = 1$



(5b)

考察 どちらの場合も、時間が経過すると3種平衡点に収束した。3種平衡点は、(5a)については第4章で漸近安定と証明できているが、(5b)についても漸近安定であると推測できる。

以上のことをまとめると、以下の表のようになる。

表 5.4: 安定性

平衡点	May-Leonard(5a)	聖域考慮 ver(5b)
0種	不安定	存在しない
1種	不安定	存在しない
2種	存在しない	存在しない
3種	安定	安定

## 5.5 $\alpha < 1 \wedge \beta > 1 \wedge \alpha + \beta > 2$ のとき

5.3 の場合の  $\alpha$  と  $\beta$  を入れ替えたものなので 5.3 と同様の結果が得られる。

## 5.6 $\alpha < 1 \wedge \beta > 1 \wedge \alpha + \beta < 2$ のとき

5.4 の場合の  $\alpha$  と  $\beta$  を入れ替えたものなので 5.4 と同様の結果が得られる。

## 5.7 さまざまな実験からわかったこと

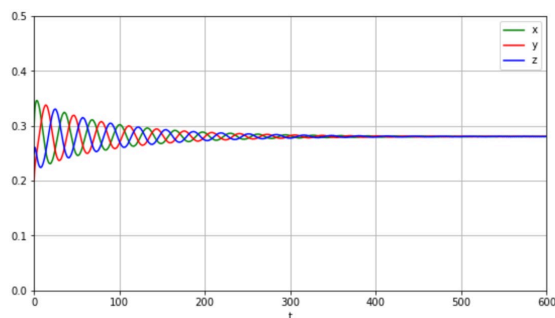
5.1~5.6 では、May-Leonard のモデル (5a) と聖域を考慮した May-Leonard のモデル (5b) を  $\alpha$  と  $\beta$  の値は同値にして、比較していった。ここでは、聖域を考慮した May-Leonard のモデル (5b) で  $c$  の値を変化させたときにわかったことをまとめておく。

(5b) 聖域からの供給を考慮した May-Leonard のモデル ( $c_1 = c_2 = c_3 = c$ ,  $r_i (i = 1, 2, 3) = 1$ )

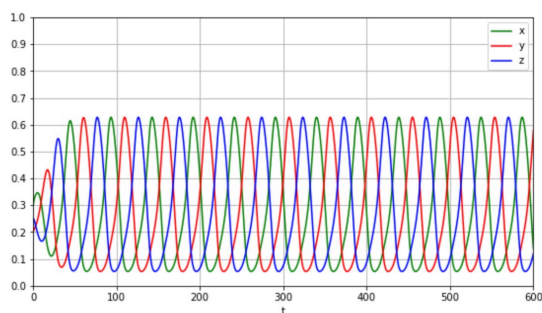
$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = c + N_1(1 - N_1 - \alpha N_2 - \beta N_3) \\ \frac{dN_2}{dt} = c + N_2(1 - \beta N_1 - N_2 - \alpha N_3) \\ \frac{dN_3}{dt} = c + N_3(1 - \alpha N_1 - \beta N_2 - N_3) \end{cases}$$

(1)  $\alpha + \beta > 2$  のとき、 $c$  の値 (境界ありであるが) によっては、魚種交替のような現象のシミュレーション結果が出た。シミュレーション結果は以下の通り。

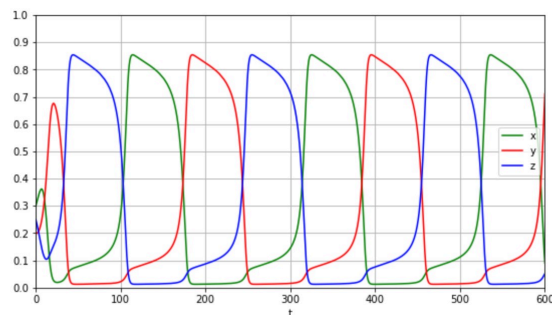
・  $\alpha = 2.0$ ,  $\beta = 1.2$  は共通、 $c = 0.05$  と  $c = 0.025$  と  $c = 0.01$



$c = 0.05$

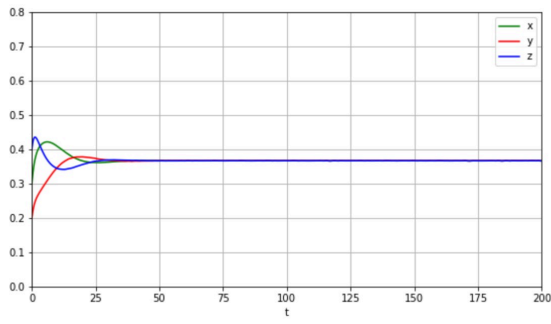


$c = 0.025$

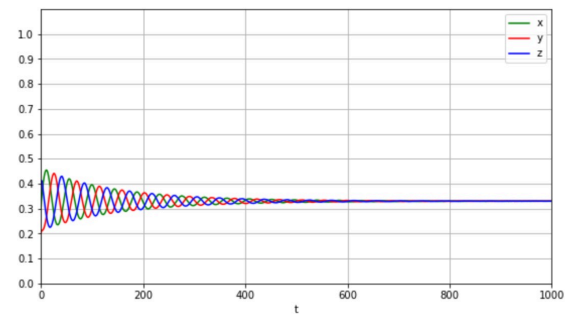


$c = 0.01$

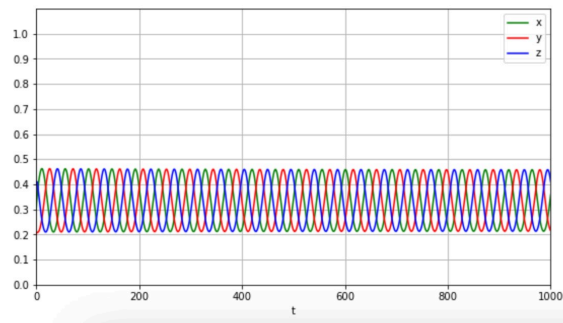
・  $\alpha = 1.3$ ,  $\beta = 0.8$  は共通、 $c = 0.05$  と  $c = 0.0075$  と  $c = 0.005$  と  $c = 0.0025$



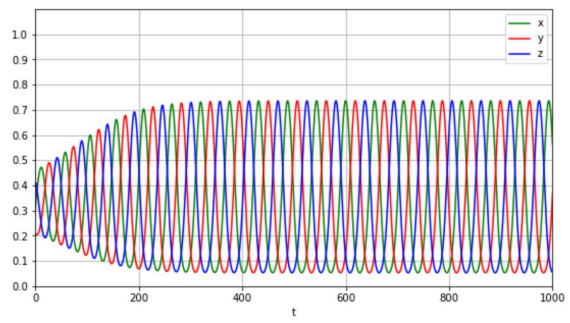
$c = 0.05$



$c = 0.0075$



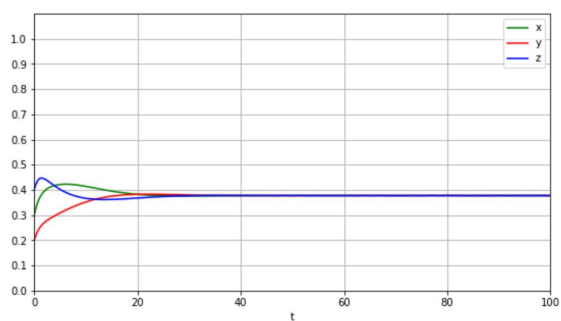
$c = 0.0005$



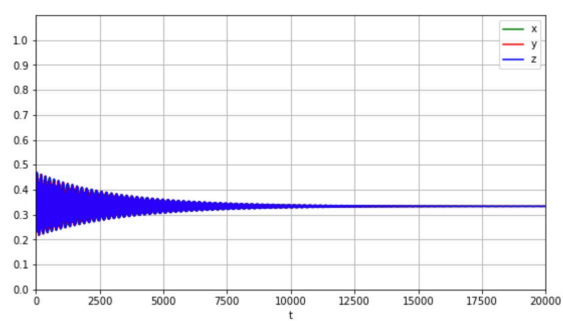
$c = 0.0025$

(2)  $\alpha + \beta \leq 2$  のとき、どんなに  $c$  の値を小さくしても 3 種の平衡点に収束する。シミュレーション結果は以下の通り。

・  $\alpha = 1.2, \beta = 0.8$  は共通、 $c = 0.05$  と  $c = 0.0001$

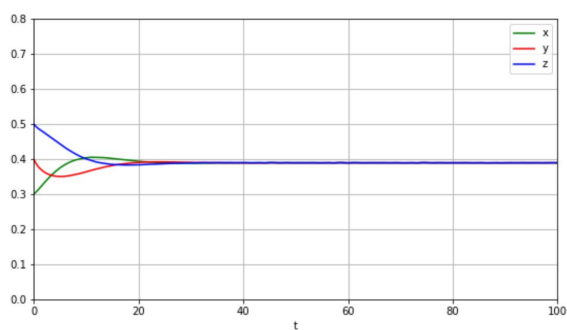


$c = 0.05$

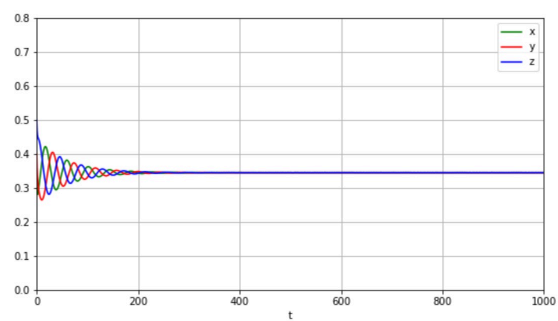


$c = 0.0001$

・  $\alpha = 1.2, \beta = 0.7$  は共通、 $c = 0.05$  と  $c = 0.0000001$



$c = 0.05$



$c = 0.0000001$

## 第6章 今後の課題

今回、私が重きを置いて研究してきたのが、第4,5章である。その中で、第5章で聖域からの供給を考慮したモデルで具体的な数値を決めて比較をした。検証したことによって、どの場合で差が生まれるのかがシミュレーションという形で明瞭にわかったと思う。

ただ、少数のパラメータでしかシミュレーションできていないので、あくまで予想だが、値  $(\alpha, \beta, c, r_i (i = 1, 2, 3))$  によっては、魚種交替のような現象が見られる数値の範囲があると考えている。5.7のように魚種交替のような現象を表現することはできたもののどのタイミングで、周期的な解が得られるのかをまだわかっていない。なので、どの数値が境となり周期的な解が得られるのか、また、3種平衡点に収束するのかいずれか調べてみたい。

# 第7章 付録プログラム

## 7.1 Logistic 方程式のシミュレーション (Python)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

# ロジスティック方程式の定義
def logistic_model(N, t, r, K):
    dNdt = r * N * (1 - N / K)
    return dNdt

# 初期条件
initial_population = 0.001 # 初期個体数
time_points = np.linspace(0, 50, 100) # 時間ポイント

# パラメータの設定
num_curves = 40 # 描画する線の本数
growth_rate_values = np.linspace(0.2, 1.0, num_curves) # 成長率の範囲
carrying_capacity = 1.0 # 最大個体数

# 成長率ごとに解軌道を描く
for growth_rate in growth_rate_values:
    # ロジスティック方程式を解く
    solution = odeint(logistic_model, initial_population, time_points,
                      args=(growth_rate, carrying_capacity))

    # グラフの描画
    plt.plot(time_points, solution, color='blue', alpha=0.2)

# グラフの装飾
plt.xlabel('Time')
plt.ylabel('Population')
plt.title('Logistic Growth Model ')
plt.xticks([])
plt.yticks([])
plt.show()
```

## 7.2 Lotka-Volterra方程式の解軌道のシミュレーション(Python)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

# ロトカ・ボルテラ方程式の定義
def lotka_volterra(y, t, alpha, beta, delta, gamma):
    prey, predator = y
    dydt = [alpha * prey - beta * prey * predator,
            delta * prey * predator - gamma * predator]
    return dydt

# 初期条件
initial_population = [1, 1] # 初期被食者数と捕食者数
time_points = np.linspace(0, 10, 1000) # 時間ポイント

# パラメータの設定
alpha = 2
beta = 1
delta = 1
gamma = 3

# ロトカ・ボルテラ方程式を解く
solution = odeint(lotka_volterra, initial_population,
                  time_points, args=(alpha, beta, delta, gamma))

# グラフの描画
plt.figure(figsize=(20, 5))
plt.subplot(121)
plt.plot(time_points, solution[:, 0], 'r', label='x')
plt.plot(time_points, solution[:, 1], 'b', label='y')
plt.xticks([])
plt.yticks([])
plt.show()
```

## 7.3 第5章で用いたシミュレーション (Python)

主に第5章での比較でこのプログラムを用いた。適宜  $\alpha, \beta, c, r_1, r_2, r_3$  の値や *var\_init*(初期値) を変更して活用すると良いと思う。

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt

# 連立微分方程式を設定
def func(t, var, r1, r2, r3, a, b,c):
    dN1dt = c+(r1 - var[0] - a*var[1] - b*var[2]) * var[0]
    dN2dt = c+(r2 - b*var[0] - var[1] - a*var[2]) * var[1]
    dN3dt = c+(r3 - a*var[0] - b*var[1] - var[2]) * var[2]
    return [dN1dt, dN2dt, dN3dt]

if __name__ == '__main__':
    t_span = (0.0, 600.0)
    t_eval = np.linspace(*t_span, 3000)

    r1, r2, r3 = 1.0, 1.0, 1.0
    a = 2.0
    b = 1.2
    c = 0.05

    var_init = [0.3, 0.2, 0.25]

    sol = solve_ivp(
        fun=lambda t, y: func(t, y, r1, r2, r3, a, b,c),
        t_span=t_span,
        y0=var_init,
        t_eval=t_eval,
        method='RK45'
    )

    plt.figure(figsize=(20, 5))
    plt.subplot(121)
    plt.plot(sol.t, sol.y[0], 'g', label='x')
    plt.plot(sol.t, sol.y[1], 'r', label='y')
    plt.plot(sol.t, sol.y[2], 'b', label='z')
    plt.xlim(0, 600)
    plt.ylim(0, 1.0)
    plt.yticks(np.arange(0, 1.1, 0.1))
    plt.legend(loc='best')
    plt.xlabel('t')
    plt.grid()
    plt.show()
```

## 7.4 第5章で平衡点の数値計算に用いたもの (Mathematica)

主に第5章での平衡点の数値計算に用いた。適宜  $a, b, c_1, c_2, c_3, r_1, r_2, r_3$  の値を変更して活用するといふと思う。

```
Clear[c1, c2, c3, a, b, r1, r2, r3, x, y, z]
```

クリア

```
{c1, c2, c3} = {0.05, 0.05, 0.05};
```

```
a = 2.0; b = 1.2;
```

```
{r1, r2, r3} = {1.0, 1.0, 1.0};
```

```
NSolve[{c1 + (r1 - x - a * y - b * z) * x == 0, c2 + (r2 - b * x - y - a * z) * y == 0, c3 + (r3 - a * x - b * y - z) * z == 0},
```

数値解

```
{x, y, z}]
```

計算方法

# 参考文献

- [1] M. ブラウン, 微分方程式 上 その数学と応用, シュプリンガー・ジャパン (2001).
- [2] M. ブラウン, 微分方程式 下 その数学と応用, シュプリンガー・ジャパン (2001).
- [3] 今 隆助, 竹内康博, 常微分方程式とロトカ・ヴォルテラ方程式, 共立出版 (2018).
- [4] 桂田 祐史, 常微分方程式を学ぶ,(閲覧日 2024 年 1 月 30 日)  
(<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/ode-workbook/>).
- [5] 松田裕之, 環境生態学序説, 共立出版 (2000)
- [6] 鈴木武, 山田義雄, 柴田良弘, 田中和永, 理工系のための微分積分 I, 内田老鶴圃 (2007)
- [7] Robert M. May and Warren J. Leonard, Nonlinear Aspects of Competition Between Three Species, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 29, No. 2 (Sep., 1975), pp. 243-253
- [8] 河井智康, イワシと逢えなくなる日, 角川ソフィア文庫 (2001).
- [9] Takeuchi, Y., Oshime, Y. and Matsuda, H.: Persistence and Periodic Orbits of a Three-Competitor Model with Refuges, Mathematical Biosciences, Vol. 108, pp. 105 - 125 (1992).
- [10] Jaramillo, G., Mrad, L. and Stepien, T. L.: Dynamics of a linearly perturbed May-Leonard competition model, Chaos, Vol. 33, No. 6 (2023)