2021年度現象数理研究 I のための解説

～常微分方程式と向き合う, SIR モデルをネタに ～

桂田 祐史（かつらだ まさし）

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/2021Q1/20210409kougi.pdf

2021 年 4 月 9 日, 6 月 4 日

目次

はじめに

繰り返しになるが、

私 (桂田) の学部ゼミで個人の研究テーマ選択はかなり自由。

はじめに

繰り返しになるが、

私 (桂田) の学部ゼミで個人の研究テーマ選択はかなり自由。

こちらからのお勧めは、**微分方程式に係る研究**。

はじめに

繰り返しになるが、

私 (桂田) の学部ゼミで個人の研究テーマ選択はかなり自由。

こちらからのお勧めは、**微分方程式に係る研究**。

独立変数が 1 個の常微分方程式には、色々な授業で出会っているはず。

各自が何か 1 つの微分方程式 (自分で選ぼう) に係ることを調べる、あるいは微分方程式についての定理を学ぶ、という内容にする。

はじめに

繰り返しになるが、

私 (桂田) の学部ゼミで個人の研究テーマ選択はかなり自由。

こちらからのお勧めは、**微分方程式に係る研究**。

独立変数が 1 個の常微分方程式には、色々な授業で出会っているはず。

各自が何か 1 つの微分方程式 (自分で選ぼう) に係ることを調べる、あるいは微分方程式についての定理を学ぶ、という内容にする。

以下ヒント

- 授業や自分が読んだ本等で触れたもの、今回自分なりに探したもの
佐藤 [1], [2], バージェンス・ボリー [3], 小川・宮路 [4], 藤田・齊藤 [5]
- 現象のモデルとなっている微分方程式を選ぶことを勧める。
なぜその方程式を考えるのか、一般化するとどうなるか、意識する。
- なるべく数値シミュレーションする。やり方が分からない場合は、遠慮なく相談して下さい (サンプル・プログラムを少し直すだけで始められる場合が多い)。

感染症の数理モデル　SIR モデル

感染症の数学的取り扱いについては、D. Bernoulli による先駆的な研究もあったが、Kermack and McKendrick [6] の研究 (1927) が重要。

感染症の数学的取り扱いについては、D. Bernoulli による先駆的な研究もあったが、Kermack and McKendrick [6] の研究 (1927) が重要。
[6] で次のモデル (微分方程式) が提唱された。

(1) $$S'(t) = -\beta S(t)I(t),$$

(2) $$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t),$$

(3) $$R'(t) = \gamma I(t).$$

t は時刻、$S(t)$ は "感受性者" の数, $I(t)$ は感染者の数, $R(t)$ は回復者 (あるいは除去者) の数。
β は感染のしやすさを表す正定数, γ は回復率を表す正定数。
初期値 $S(0) > 0$, $I(0) > 0$, $R(0) = 0$ を与えて、時間が経過するとどうなるか考える。

(このモデルについて学ぶ場合は、佐藤 [2] から始めることを勧める。)

簡単に分かる性質: 総人口は一定

$N := S(0) + I(0) + R(0)$ とおく。これは時刻 0 での総人口を表す。

定理 0.1

SIR モデルでは総人口は (時間が経過しても) 一定である。

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \quad (t > 0).$$

簡単に分かる性質: 総人口は一定

$N := S(0) + I(0) + R(0)$ とおく。これは時刻 0 での総人口を表す。

定理 0.1

SIR モデルでは総人口は (時間が経過しても) 一定である。

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \quad (t > 0).$$

証明.

$$\frac{d}{dt}(S(t) + I(t) + R(t)) = -\beta S(t)I(t) + (\beta S(t)I(t) - \gamma I(t)) + \gamma I(t) = 0$$

であるから、$S(t) + I(t) + R(t)$ は定数である。 □

微分方程式を立てる議論を知っていると当然に思えることであるが、数学的にも証明できる、ということである。

$S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ のどれか 2 つだけを考えれば十分、ということが分かる。

一般論との照らし合わせ

微分方程式のテキストを見ると、1 階正規形微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \quad (t \in I) \tag{4}$$

$$x(t_0) = \xi \tag{5}$$

について (解の一意存在、数値解法等) 解説されていることが多い。

$$x := \begin{pmatrix} S \\ I \\ T \end{pmatrix}, \quad f(t, x) := \begin{pmatrix} -\beta SI \\ \beta SI - \gamma I \\ \gamma I \end{pmatrix}$$

とおくと、SIR モデルはこの形をしていることが分かる。

特に $f(t, x)$ が陽に t を含まない、いいかえると

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad \left(f(x) := \begin{pmatrix} -\beta SI \\ \beta SI - \gamma I \\ \gamma I \end{pmatrix} \right)$$

という形をしている。いわゆる**力学系** (古い言い方だと**自励系**) である。

「力学系」という言葉をタイトルに持つテキストはたくさんあるが、その守備範囲に入っている、ということになる。

解けるか？…解の存在と一意性は大丈夫

いわゆる**式変形 (求積法) では解を求められない** (と思われる。線形方程式に帰着したり出来なそう。)。

解けるか？…解の存在と一意性は大丈夫

いわゆる**式変形 (求積法) では解を求められない** (と思われる。線形方程式に帰着したり出来なそう。)。

しかし、**任意の初期値に対して、解が存在して、一意的である**ことは、有名な定理から分かる (f が C^1 級であるから、連続かつ x につき局所的に Lipschitz 条件を満たす)。

解けるか？…解の存在と一意性は大丈夫

いわゆる**式変形 (求積法) では解を求められない** (と思われる。線形方程式に帰着したり出来なそう。)。

しかし、**任意の初期値に対して、解が存在して、一意的である**ことは、有名な定理から分かる (f が C^1 級であるから、連続かつ x につき局所的に Lipschitz 条件を満たす)。

変数 t のどの範囲について解が存在するかは少し考える必要がある。

解けるか？…解の存在と一意性は大丈夫

いわゆる**式変形 (求積法) では解を求められない** (と思われる。線形方程式に帰着したり出来なそう。)。

しかし、**任意の初期値に対して、解が存在して、一意的である**ことは、有名な定理から分かる (f が C^1 級であるから、連続かつ x につき局所的に Lipschitz 条件を満たす)。

変数 t のどの範囲について解が存在するかは少し考える必要がある。

解の存在や一意性についての定理にも関心を持ってもらいたいが、f が C^1 級ならば成り立つ、とりあえず前進する、で構わない。
(存在しないとナンセンスだし、一意性がないと議論が難しくなる。)

解ではないけれど、解軌道は分かる (ラッキー)

繰り返し: 総人口が一定だから、$S(t)$ と $I(t)$ だけを考えれば十分である。

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

解ではないけれど、解軌道は分かる (ラッキー)

繰り返し: 総人口が一定だから、$S(t)$ と $I(t)$ だけを考えれば十分である。

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

であるから

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\beta SI - \gamma I}{-\beta SI} = -1 + \frac{\rho}{S}.$$

ただし $\rho := \gamma/\beta$.

解ではないけれど、解軌道は分かる (ラッキー)

繰り返し: 総人口が一定だから、$S(t)$ と $I(t)$ だけを考えれば十分である。

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

であるから

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\beta SI - \gamma I}{-\beta SI} = -1 + \frac{\rho}{S}.$$

ただし $\rho := \gamma/\beta$.

積分して

$$(\heartsuit) \qquad I = I_0 + S_0 - S + \rho \log \frac{S}{S_0}.$$

ただし $S = S(t)$, $I = I(t)$, $S_0 = S(0)$, $I_0 = I(0)$ とおいた。

解ではないけれど、解軌道は分かる (ラッキー)

繰り返し: 総人口が一定だから、$S(t)$ と $I(t)$ だけを考えれば十分である。

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

であるから

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\beta SI - \gamma I}{-\beta SI} = -1 + \frac{\rho}{S}.$$

ただし $\rho := \gamma/\beta$.

積分して

$$(\heartsuit) \qquad I = I_0 + S_0 - S + \rho \log \frac{S}{S_0}.$$

ただし $S = S(t)$, $I = I(t)$, $S_0 = S(0)$, $I_0 = I(0)$ とおいた。

($\heartsuit$) は、SI 平面で解 $(S(t), I(t))$ が描く曲線 (解軌道) を表す方程式である。

念のため注意

式変形で解が求まらない、と言っておいて、求まってしまったように思えるかもしれないが、

念のため注意

式変形で解が求まらない、と言っておいて、求まってしまったように思えるかもしれないが、

ここで解と言っているのは、t を変数とする関数 $S(t), I(t)$ のことであり、上では S と I の関係式が得られただけで、$S(t), I(t)$ が求まったわけではない。

念のため注意

式変形で解が求まらない、と言っておいて、求まってしまったように思えるかもしれないが、

ここで解と言っているのは、t を変数とする関数 $S(t)$, $I(t)$ のことであり、上では S と I の関係式が得られただけで、$S(t)$, $I(t)$ が求まったわけではない。

このようなことは良く起こる。有名なものから二つの例。

- 惑星の運動 (二体問題、Kepler 運動) では、軌道が楕円になる、ということが有名であるが、それは解そのものではない (Bessel 関数を用いた無限級数の解が知られている)。
- Lotka-Volterra の方程式でも、解自体は求まらなくても、解軌道 (閉曲線になる) の方程式が得られることは有名である。

方程式 $I = I_0 + S_0 - S + \rho \log \frac{S}{S_0}$ から分かること (1)

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\rho}{S} = \frac{\rho - S}{S}$$

だから、I を S の関数とみなすとき、$0 < S < \rho$ で増加関数、$S > \rho$ で減少関数であり、$S = \rho$ で最大値をとる。$\frac{d^2 I}{dS^2} = -\rho/S^2 < 0$ だからグラフは上に凸。

一方微分方程式から、$S, I > 0$ の範囲で $S(t)$ が減少関数であることが分かる。

$S(0) > 0$, $I(0) > 0$ とすると、$\displaystyle\lim_{t \to \pm\infty} I(t) = 0$ が分かる。

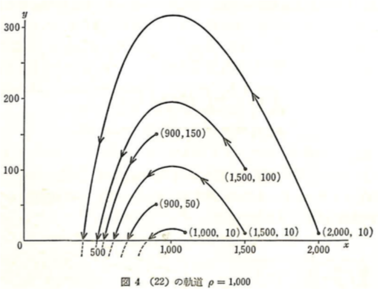

図 1: (22) の軌道 $\rho = 1,000$ (佐藤 [2] p. 176 図 4)

方程式 $I = I_0 + S_0 - S + \rho \log \frac{S}{S_0}$ から分かること (2)

初期値 $S(0)$, $I(0)$ を定めると、1 つの解軌道が定まる。それと S 軸との交点の S 座標として求めることで、$S(\infty)$ が得られる。

$I(\infty) = 0$, $S(\infty) + I(\infty) + R(\infty) = N$ であるから、$R(\infty) = N - S(\infty)$ は、この病気の流行期間に病気にかかった人の数ということになる。

方程式 $I = I_0 + S_0 - S + \rho \log \frac{S}{S_0}$ から分かること (2)

初期値 $S(0)$, $I(0)$ を定めると、1 つの解軌道が定まる。それと S 軸との交点の S 座標として求めることで、$S(\infty)$ が得られる。

$I(\infty) = 0$, $S(\infty) + I(\infty) + R(\infty) = N$ であるから、$R(\infty) = N - S(\infty)$ は、この病気の流行期間に病気にかかった人の数ということになる。

さらに次の**閾値定理**が得られる。

定理 0.2 (閾値定理)

初期感染者数 I_0 は少なく、初期感受性者数 S_0 が $S_0 > \rho$ を満たすとする。このとき、$S_0 = \rho + \nu$ とおくと、最終的にその病気にかかる人の数は近似的に 2ν に等しい。

方程式 $I = I_0 + S_0 - S + \rho \log \frac{S}{S_0}$ から分かること (2)

初期値 $S(0)$, $I(0)$ を定めると、1 つの解軌道が定まる。それと S 軸との交点の S 座標として求めることで、$S(\infty)$ が得られる。

$I(\infty) = 0$, $S(\infty) + I(\infty) + R(\infty) = N$ であるから、$R(\infty) = N - S(\infty)$ は、この病気の流行期間に病気にかかった人の数ということになる。

さらに次の**閾値定理**が得られる。

定理 0.2 (閾値定理)

初期感染者数 I_0 は少なく、初期感受性者数 S_0 が $S_0 > \rho$ を満たすとする。このとき、$S_0 = \rho + \nu$ とおくと、最終的にその病気にかかる人の数は近似的に 2ν に等しい。

以上、約 100 年前の結果。

時間経過が知りたければ数値シミュレーション

感染者数がいつどれくらいになるかも興味がある (例えば流行曲線を描きたい)。

そのためには数値シミュレーションが (もっとも) 有効である。

時間経過が知りたければ数値シミュレーション

感染者数がいつどれくらいになるかも興味がある (例えば流行曲線を描きたい)。

そのためには数値シミュレーションが (もっとも) 有効である。

Runge-Kutta 法　時刻 t_n での値 x_n から、時刻 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ での値 x_{n+1} を近似的に求める

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
k_1 &= \Delta t\; f(t_n, x_n), \\
k_2 &= \Delta t\; f(t_n + \Delta t/2, x_n + k_1/2), \\
k_3 &= \Delta t\; f(t_n + \Delta t/2, x_n + k_2/2), \\
k_4 &= \Delta t\; f(t_n + \Delta t, x_n + k_3).
\end{aligned}
$$

複雑に見える？　$f(t,x)$ の計算が出来るならプログラム作成は容易。

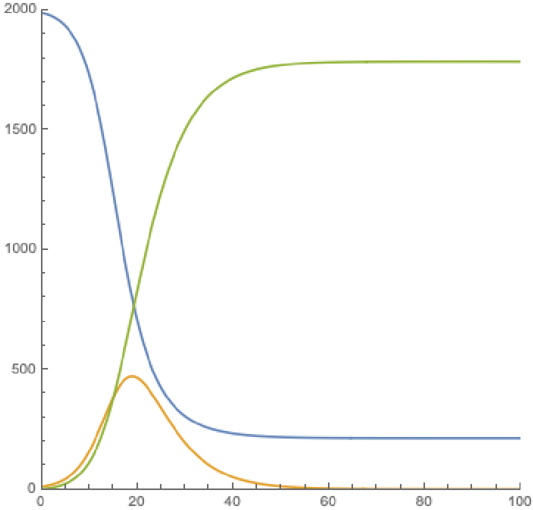

図 2: $\beta = 2.5 \times 10^{-4},\ \gamma = 2,\ S_0 = 1990,\ I_0 = 10\ (R_0 = 2.5)$

(青が S, オレンジが I, 緑が R)

モデルの一般化を考えてみる

SIR モデルは非常に単純であるが、それだけにパラメーターを変えて、たくさんのシミュレーションが可能になる。

モデルの一般化を考えてみる

SIR モデルは非常に単純であるが、それだけにパラメーターを変えて、たくさんのシミュレーションが可能になる。

SIR モデルやそれを "修正" したモデルで、調べられることも多い。

- 現実の流行で $\rho = \gamma/\beta$ を推測する。
  ($R_0 = N/\rho = \frac{\beta N}{\gamma}$ は時々耳にする「基本再生算数」である。)
- 長期に渡って考えることにして、出生や自然死 (その感染症以外の理由による死) を考慮する。
- 年齢によりパラメーター (β, γ) が異なるとして、世代を区別したシミュレーションをする
- 空間分布を考慮する
- 感染してから発症まで潜伏期間があることを考慮する

このような場合は、特に数値シミュレーションは有効である。

一言: 感染症の数理モデルを研究したい人に

今、旬なので、やりがいも感じられるし、色々な情報があふれているので考える材料には困らない。

しかし、これまでやってみた学生を見て、意外と難しい、という印象。

おかしなことを発表している人もいるし (それが分かるなら良いネタになるかもしれないけれど)。硬い本 (稲葉他 [7] のような専門書) はあるけれど、分かりやすい親切なテキストはない。

実効再生算数の計算の仕方など、例えばこういう動画を試聴して解読したりする必要がある。

> 「【8割おじさん西浦教授に聞く】新型コロナの実効再生産数のすべてオンライン講演会生中継/主催：日本科学技術ジャーナリスト会議」
> *https://live.nicovideo.jp/watch/lv325833316*

(これを見てやる気が出た、という人はチャレンジしても良いかも。)

むすび

微分方程式についての数学理論 (初期値問題の適切性とか、この文書では出て来なかったけれど力学系とか) は広大であるが、一つの微分方程式を取り上げて、それを調べる過程で必要なことを習得していくのは、良い進め方かも知れない。

参考文献

[1] 佐藤總夫（ふさお）：自然の数理と社会の数理 I, 日本評論社 (1984).

[2] 佐藤總夫（ふさお）：自然の数理と社会の数理 II, 日本評論社 (1987).

[3] デヴィッド・バージェンス, モラグ・ボリー：微分方程式で数学モデルを作ろう, 日本評論社 (1990/4/28), 垣田高夫・大町久栄訳.

[4] 小川知之, 宮路智行：数理モデルとシミュレーション, サイエンス社 (2020/12/19).

[5] 藤田宏, 齊藤宣一：はじめての応用解析, 岩波書店 (2019/9/19).

[6] Kermack, W. O. and McKendrick, A. G.: A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, Vol. 115, No. 772, pp. 700–721 (1927).

[7] 稲葉 寿（ひさし）：感染症の数理モデル, 培風館 (初版 2008, 増補版 2020/12/15).