# 卒業研究レポート
# 楽器の音

明治大学　総合数理学部　現象数理学科
4 年 2 組 20 番
2610190014
高井萌々子

2023 年 2 月 26 日

# 目 次

# 第1章　はじめに

私は卒業研究のテーマを決めるにあたり、趣味でオーケストラで演奏しているので、楽器について数学で考えることができないか考えた。卒業研究では弦楽器はどのように音を響かせているかを調べるために、音律について調べ、固有 (共振) 振動数との関係を考えた。

# 第2章　音律 Tunings

音律とは、音楽に用いる音高の相対的な関係の規定である。まず基準となる音の音高を定め、音律にしたがって他の音の音高を決める。主に周波数の比で規定されることが多い。音律にはいくつか種類があるが、主な西洋音楽の音律の例として以下の 3 つが挙げられる。

- ピタゴラス音律
- 純正律
- 平均律

音階は基本的に[1]A(ラ)=440Hz を基準として考え、周波数が 2 倍になる音を 1 オクターブ上の音としている。12 ここでは 2 つの音の音の感覚のことを音程といい、その間隔を度数で表す。同じ音同士は 1 度、12 音 (1 オクターブ) 離れると 8 度と言う。

## 2.1　ピタゴラス音律

はじめに理論的に規定された音律である。これを基にして 1 オクターブは 12 音になっている。音階の全ての音と音程を周波数比 1:2 の完全 8 度（1 オクターブ）と周波数比 2:3 の純正な完全 5 度（半音 7 個分）に基づいて導出する音律。

半音は聞こえるので、この時代に演奏されるような単調な旋律はきれいに聞こえる。しかし、基音によって濁りのおこる半音階が変わるため移調・転調がしにくい。

音高の決め方は、まず基となる音を決める。ここでは A(ラ) の音を基音とする。A に対して周波数比 2:3 の音を考える。完全 5 度上の音程は E(ミ) である。同様に、E に対して完全 5 度上の音程は H(シ) である。これを続けると、A に近い音に帰ってくる。この段階で登場する音は 12 音になる。これがピタゴラス音律の導出方法である。しかし、ピタゴラスコンマと呼ばれるズレが生じると言う欠点がある。

ここで A0 を基準の音として、1 オクターブ上の A1 を計算すると、$A1 = A0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6}$ となる。$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6} \fallingdotseq 2.027$ なので、基音が帰ってくるとき A0 に対して A1 は周波数は約 2.027 倍となる。しかし、純正な 1 オクターブ上は完全 8 度の周波数比は 2 倍である。

[1] ドイツ音名

これは約 24 セント[2]（半音の 1/4 程度）のズレになる。$\dfrac{3^m}{2^n} = 2$ を満たす自然数 $n, m$ は存在しないので、必ずズレが生じてしまう。

実用するにあたって、完全 5 度を基音から上下に対称的に導出していく。そうすることで先端にある旋律であまり使わない 2 音間にズレ（濁り）を寄せている。また、完全 5 度にのみ着目しているので 3 度の和音に少し唸りが生まれる。

## 2.2　純正律

ピタゴラス音律の規定に加え、周波数比 4:5 の純正な長 3 度に基づいて導出する音律。音階が簡単な整数比になるのでうなりの発生が抑えられ、響きがきれいになる。半音の音程が一定でないので、ピタゴラス音律と同様に移調・転調がしにくい。

音高の決め方は、まずピタゴラス音律と同様に基となる音を決める。ここでは A(ラ) の音を基音とする。A に対して周波数比 2:3 の音を考える。完全 5 度上の音程は E(ミ) である。次に A に対して周波数比 4:5 の長 3 度上の音程は Cis(ド シャープ) である。同様に周波数比を当てはめると純正律ができる。

実用するにあたって、純正律で構成されているのでハーモニーは美しい響きを持つ（唸りを持たない)。しかし、転調した際には半音の関係が音によって変わってしまうので、正しい音階にならなくなってしまう。

## 2.3　平均律

1 オクターヴなどの音程を均等な周波数比で分割した音律。半音上がるごとに周波数は $\sqrt[12]{2}$ 倍される（$r = \sqrt[12]{2}$ の等比数列になる）。半音の間隔は 100 セント。うなりが生じやすく、ハーモニーの点で劣る。

完全 8 度で周波数は 2 倍になる。$r^{12} = 2$ となる。

実用するにあたって、どの音を基準にしても 12 回繰り返すことでオクターブ上になるので転調しやすくなる。しかし、ハーモニーに注目すると純正律と比較した時に周波数が最大 5Hz も異なるので、演奏するときは平均律からかなり低めにとらないと、ハーモニーが響かない。

[2]対数単位。2 つの音の周波数を a,b とすると $(a > b)$、その 2 音の間隔を示すセント値 $n$ は以下の式で定義される。$n = 1200 \cdot \log 2(b/a)$

# 第3章　擦弦楽器の振動系

ここからはギターに関する研究と擦弦楽器の構造を基に振動について考える。

## 3.1　弦楽器の共振

ギターは主に弦を弾いて音を出す。ギターの弦を振動源として、表板・裏板・胴内の空気が共振して音を持続させて放射する。擦弦楽器と呼ばれるバイオリンは弦を弾く他に、弓と呼ばれる道具を使って弦を持続的に強制振動 (自励振動) させる。[1]自励振動とは、振動学的には「振動発生の原因である非振動的エネルギーが、その系内部の因子により振動的な励振エネルギーに変換されて発生し、自分でどんどん成長する振動」と定義されます。つまり、「与えているのはある一定の力だが、その一定の力がいつの間にか振動的な力に変化させられ、成長していく振動」です。

また、胴内に魂柱（こんちゅう）と呼ばれる木が表板と裏板を繋いでいます。

## 3.2　空気の振動

気体の性質として、一定温度下で気体の圧力と体積は反比例の関係にあるので、一度空気を圧縮すると反発力を得られる。持続的に空気圧を与えることでバネとして見ることができる。一般的に、断面積 $S$ で長さ $L$ の円筒内を自由に動ける質量 $m$ のピストンは、バネに付けられた質量と全く同じように振動する。

$p_a$ : 大気圧、$m$ : 質量、$\gamma$ : 比熱比（空気の場合 1.4)、$x$ : 変位である。まず力がかかっていない状態では圧力は $p_a$、体積は $V_0$であり、力を加えたあと圧力は $p$、体積は $V$ に変化したとする。

変化後、ピストンは $F = -S(p - p_a)$ の反発力を持つ。ポアソンの関係式より、$pV^\gamma = p_a V_0^\gamma$。また、$V = V_0 - Sx$ が成立するので、代入すると $p(V_0 - Sx)^\gamma = p_a V_0^\gamma$。つまり、$p = p_a \left(1 - \dfrac{Sx}{V_0}\right)^\gamma$ となる。$\left|\dfrac{Sx}{V_0}\right| << 1$ と考えられるので、$p = p_a \left(1 - \dfrac{Sx}{V_0}\right)^\gamma \simeq \left(1 + \gamma \dfrac{Sx}{V_0}\right)$。したがって、$F = -S\left\{p_a\left(1 + \gamma\dfrac{Sx}{V_0}\right) - p_a\right\} = -\dfrac{\gamma p_a S^2}{V_0}x.$

[1] 自励振動とは、振動学的には「振動発生の原因である非振動的エネルギーが、その系内部の因子により振動的な励振エネルギーに変換されて発生し、自分でどんどん成長する振動」と定義される。つまり、「与えているのはある一定の力だが、その一定の力がいつの間にか振動的な力に変化させられ、成長していく振動」

以上より、閉じ込められたバネ定数は $K = \dfrac{\gamma p_a S^2}{V}$ とみなすことができるので、固有周波数は $f_H = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\gamma p_a S^2}{mV_0}}$ .

### 3.2.1 ヘルムホルツ共鳴 Helmholtz Resonant

ヘルムホルツ共鳴とは、首の部分の空気の質量がピストンの作用をし、開口部を持った容器の内部にある大きな空気の体積 $V$ がバネとしての役割を果たし、共鳴（共振）し音がでることである。

共振周波数 (固有振動数) は容器の内容積と開口部の面積によって決まる。例えば、内容積を減少させると音が高くなる。ギターやバイオリンなどは板材自体も共振系なので広範囲の音に対して共鳴できる。

管内部にある空気塊は以下の運動方程式に従って剛体的に振動する。

$$\rho S l \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\gamma p S^2}{V} x = 0\ .$$

質量 $m = \rho SL$ を持ったピストン, バネ係数 $K = \dfrac{\gamma p S^2}{V} = \dfrac{\rho S^2 c^2}{V}$ の単振動

固有角振動数

$$\omega_0 = c\sqrt{\frac{S}{VL}}\left(\text{音速}\ c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}\right)$$

共振周波数 (固有振動数) $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K}{m}} = \dfrac{c}{2\pi}\sqrt{\dfrac{S}{VL}}$

開口部に振動数 $\omega_0$ に一致する圧力振動が加えられると共鳴が発生する。共鳴周波数は $S$ の平方根に正比例、$V, L$ の平方根に反比例。例えば、首が短いほど振動の固有周波数は高くなる。

開口部補正 end correction

開口部周辺の空気も付加的に振動する。実測値 $L$ ではなく、実効長 $L'$ として補正する。

(i) 開口部にフランジがない

瓶やフラスコなど。$L' \approx L + 0.61a$($a$ : 開口部の半径)

(ii) 開口部にフランジがある

オカリナやギターなど。$L' = L + \dfrac{8}{3\pi}a \approx L + 0.85a$($a$ : 開口部の半径)

(iii) 開口部が円形でない

ヴァイオリンなど。$L' = L + \sqrt{S}$

(ii),(iii) のとき、$L$ の値が小さい（首が短い）が共鳴の発生に違いはない。

ヘルムホルツ共鳴は一つの容器に対して共振周波数が一つに定まる。これは幅広い音域

を出す楽器には向いていない。ロッシングによると、ヘルムホルツ共鳴は低い周波数の時に起こることである。周波数が高くなるにつれ、弦や板の振動も考慮するべきである。

楽器の音域ヴァイオリンは、最低音は G2。最高音は安定して出せるのは大体 4 オクターブ。弦楽器の場合演奏者の技術や奏法によって理論上無限に高い音が出せる。

## 3.3 弦の振動

## 3.4 強制振動

## 3.5 連成振動

連成振動とはバネを複数繋いで、起きる振動である。バイオリンのような擦弦楽器では弦、駒、表板、魂柱、裏板といった部品がそれぞれ連成振動によって音を響かせています。

運動方程式

$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2$

$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2) = k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + k_3x_3$

$m_3\ddot{x}_3 = -k_3(x_3 - x_2) - k_4x_3 = k_3x_2 - (k_3 + k_4)x_3$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-k_1 - k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2 - k_3}{m_2} & \frac{k_3}{m_2} \\ 0 & \frac{k_3}{m_3} & \frac{-k_3 - k_4}{m_3} \end{pmatrix}$$

$x_1 = A_1e^{i\omega t}, x_2 = A_2e^{i\omega t}, x_3 = A_3e^{i\omega t}$

代入

$m_1A_1\ddot{e}^{i\omega t} = -(k_1 + k_2)A_1e^{i\omega t} + k_2A_2e^{i\omega t}$

$m_2A_2\ddot{e}^{i\omega t} = k_2A_1e^{i\omega t} - (k_2 + k_3)A_2e^{i\omega t} + k_3A_3e^{i\omega t}$

$m_3A_3\ddot{e}^{i\omega t} = k_3A_2e^{i\omega t} - (k_3 + k_4)A_3e^{i\omega t}$

$-\omega^2m_1A_1 = -(k_1 + k_2)A_1 + k_2A_2$

$-\omega^2m_2A_2 = k_2A_1 - (k_2 + k_3)A_2 + k_3A_3$

$-\omega^2m_3A_3 = k_3A_2 - (k_3 + k_4)A_3$

$(\omega^2m_1 - k_1 - k_2)A_1 + k_2A_2 = 0$

$k_2A_1 + (\omega^2m_2 - k_2 - k_3)A_2 + k_3A_3 = 0$

$k_3A_2 + (\omega^2m_3 - k_3 - k_4)A_3 = 0$

$A_1 = A_2 = A_3 = 0$ 以外の解を持つ条件

$$A = \begin{pmatrix} m_1\omega^2 - k_1 - k_2 & k_2 & 0 \\ k_2 & m_2\omega^2 - k_2 - k_3 & k_3 \\ 0 & k_3 & m_3\omega^2 - k_3 - k_4 \end{pmatrix}$$

上式を満たす $\omega$ の値が得られ、$x_1, x_2, x_3$ の実数解を求めることができる。

例をいくつか示す。

$m_1 = m_2 = m_3 = m, k_1 = k_2 = k_3 = k4 = k$ のとき、

$$A = \begin{pmatrix} m\omega^2 - 2k & k & 0 \\ k & m\omega^2 - 2k & k \\ 0 & k & m\omega^2 - 2k \end{pmatrix}$$

上式を満たす $\omega$ は、$\omega_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}\,\omega_0,\ \omega_2 = \sqrt{2}\,\omega_0,\ \omega_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\,\omega_0$

(i) $\omega = \omega_1$ のとき、

$A_1 : A_2 : A_3 = 1 : \sqrt{2} : 1$

$x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1),\ x_2 = \sqrt{2} a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1),\ x_3 = a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1)$

(ii) $\omega = \omega_2$ のとき、

$A_1 : A_3 = 1 : -1,\ A_2 = 0$

$x_1 = a_1 \cos(\omega_2 t + \theta_2),\ x_2 = 0,\ x_3 = a_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$

(iii) $\omega = \omega_3$ のとき、

$A_1 : A_2 : A_3 = 1 : -\sqrt{2} : 1$

$x_1 = a_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3),\ x_2 = -\sqrt{2} a_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3),\ x_3 = a_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3)$

重ね合わせより、

$x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + a_1 \cos(\omega_2 t + \theta_2) + a_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3)$

$x_2 = \sqrt{2} a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) - \sqrt{2} a_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3)$

$x_3 = a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) + a_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3)$

次に、$m_1 = m_3 = m, m_2 = M, k_1 = k_2 = k_3 = k4 = k$ のとき、

$$A = \begin{pmatrix} m\omega^2 - 2k & k & 0 \\ k & M\omega^2 - 2k & k \\ 0 & k & m\omega^2 - 2k \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{M + m - \sqrt{m^2 + M^2}}{M}}\omega_0,\ \omega_2 = \sqrt{2}\,\omega_0,\ \omega_3 = \sqrt{\frac{M + m + \sqrt{m^2 + M^2}}{M}}\omega_0$$

(i) $\omega=\omega_1$ のとき、

$A_1 : A_2 : A_3 = 1 : \dfrac{M-m+\sqrt{M^2+m^2}}{M} : 1$

$x_1 = a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1),\ x_2 = \dfrac{M-m+\sqrt{M^2+m^2}}{M}a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1),\ x_3 = a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1)$

(ii) $\omega=\omega_2$ のとき、

$A_1 : A_3 = 1 : -1,\ A_2 = 0$

$x_1 = a_1\cos(\omega_2 t+\theta_2),\ x_2 = 0,\ x_3 = a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2)$

(iii) $\omega=\omega_3$ のとき、

$A_1 : A_2 : A_3 = 1 : \dfrac{M-m-\sqrt{M^2+m^2}}{M} : 1$

$x_1 = a_3\cos(\omega_3 t+\theta_3),\ x_2 = \dfrac{M-m-\sqrt{M^2+m^2}}{M}a_3\cos(\omega_3 t+\theta_3),\ x_3 = a_3\cos(\omega_3 t+\theta_3)$

重ね合わせより、

$x_1 = a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1) + a_1\cos(\omega_2 t+\theta_2) + a_3\cos(\omega_3 t+\theta_3)$

$x_2 = \dfrac{M-m+\sqrt{M^2+m^2}}{M}a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1) - \dfrac{M-m-\sqrt{M^2+m^2}}{M}a_3\cos(\omega_3 t+\theta_3)$

$x_3 = a_1\cos(\omega_1 t+\theta_1) + a_2\cos(\omega_2 t+\theta_2) + a_3\cos(\omega_3 t+\theta_3)$

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-(k_1+k_2)}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-(k_2+k_3)}{m_2} & \frac{k_3}{m_2} \\ 0 & \frac{k_3}{m_2} & \frac{-(k_3+k_4)}{m_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-(k_1+k_2)}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-(k_2+k_3)}{m_2} & \frac{k_3}{m_2} \\ 0 & \frac{k_3}{m_2} & \frac{-(k_3+k_4)}{m_3} \end{pmatrix} = -A$$ とおく。

$$\frac{d^2\mathbb{x}}{dt^2} = -A\mathbb{x}$$

$$det(\lambda I - \tilde{A}) = det\begin{pmatrix} \lambda I & -I \\ A & \lambda I \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda^3}det\begin{pmatrix} \lambda^2 I & -\lambda I \\ A & \lambda I \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda^3} det \begin{pmatrix} \lambda^2 I + A & 0 \\ A & \lambda I \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda^3} det(\lambda^2 I + A) det(\lambda I) = det(\lambda^2 I + A)$$

A の固有値は正になる（はず）。

3 次方程式が 3 つの実数解を持つ条件

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$X^3 + pX + q = 0$

$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$

# 第4章　まとめ

　音律というものは数学的に定められていることが分かった。楽器の音の響きについても、運動方程式を立て、近似的に解明できることが分かった。ヴァイオリン族の擦弦楽器は楽器の構造上解析が難しかった。

# 参考文献

[1] N. H. フレッチャー, T. D. ロッシング:楽器の物理学, シュプリンガー・フェアラーク東京 (2002), 岸 憲史, 久保田 秀美, 吉川 茂 訳.

[2] 楽典〜洗足オンラインスクール, https://www.senzoku-online.jp/theory/classic/