

2022年度 桂田研究室卒業研究レポート

虹

明治大学 総合数理学部 現象数理学科
4年1組18番 26101900010
越野奈津希

指導教員 桂田 祐史 准教授

2023/02/28

概要

私は、虹を見るとつい写真に納めてしまう。反射によって地面に虹ができていたり、家のコップから虹が出ていたり、注意してみていると身近に虹を発見して幸せな気持ちになる。小さい頃から虹について様々な疑問がある。どうしてできるか？いつ、どこに見えるのか？雨上がりの時だけなのか？なぜ7色がつくのか？なぜアーチ型なのか？本研究では、見ると幸せにしてくれる虹の原理を解明し、コンピュータ上で再現することを目的とする。

目次

| | | |
|-----|----------------|---------|
| 第1章 | はじめに | p.3 |
| 第2章 | 光について | p.4-8 |
| 第3章 | 水滴に当たった太陽光について | p.9-14 |
| 第4章 | 波長と色 | p.15-20 |
| 第5章 | 虹のシミュレーション | p.20-23 |
| 第6章 | 今後について | p.23 |
| | 参考文献 | p.24 |

第1章 はじめに

虹とは、太陽光が空に浮かぶ水滴の中で反射・屈折して、色分かれして見える円弧状の光のことである。日本では虹の色は赤、橙、黄、緑、青、藍、紫の7色と考えられているが、国や宗教によって様々に捉えられる。しかし、物理学の視点では色は無限にあると考えるのが正しい。太陽光のスペクトルは連続しており、連続したものを数えることはできないからである。

また、虹を見た時に少し上の方を見ると、もうひとつ虹がかかっていることがある。普通に見かける内側の虹を主虹、外側の虹を副虹と呼ぶ。主虹と比べると、副虹はぼんやり薄い色をしている。主虹がぼんやりと見える時には副虹は見るできない。主虹の色の並び方は、内側が紫色、外側が赤色であり、副虹はその逆の並び方である。主虹が空気中の水滴で1回反射されたものであるのに対して、副虹は2回反射されたもの。その結果、色の順番にも違いが現れる。

虹は、にわか雨が降った後の雨上がりの空で見かけたり、探したりすることが多いであろう。しかし、このような条件が揃っていても虹が見えなかった時がある。虹はいつどこに見えるのか、どのような条件の時に虹を見ることができるのか、より詳しく解明していく。実際の虹と比べて虹のシミュレーションを行う。



図1：実際の虹の写真 [下：主虹 上：副虹]

(imageslabo 「雨上がりの虹」 (2019/08/08) より引用 <https://imageslabo.com/photo/1180>)

第2章 直進する光

虹が太陽光と水滴によって作られることは説明した。二つの相互作用を究明するために、まずは光の性質について述べる。

2.1 光とは

電磁波のうち人の目が認識できる波長のものを光と呼ぶ。自然科学の分野では可視光線と呼ばれることもある。その波長は個人によって差はあるがおよそ 380nm~780nm の間である。人の目は波長の違いを色の違いとして認識している。

2.2 光の直進

真空中や空気中などの均一な物質内では光は直進する。これはカーテンの小さな隙間から室内に漏れる光や、太陽によってできる影がはっきりとできることからわかる。また、太陽と地球の間には十分な距離(1 億 5000 万 km)があるため、地球に届く太陽光は平行光線であると見なして良い。

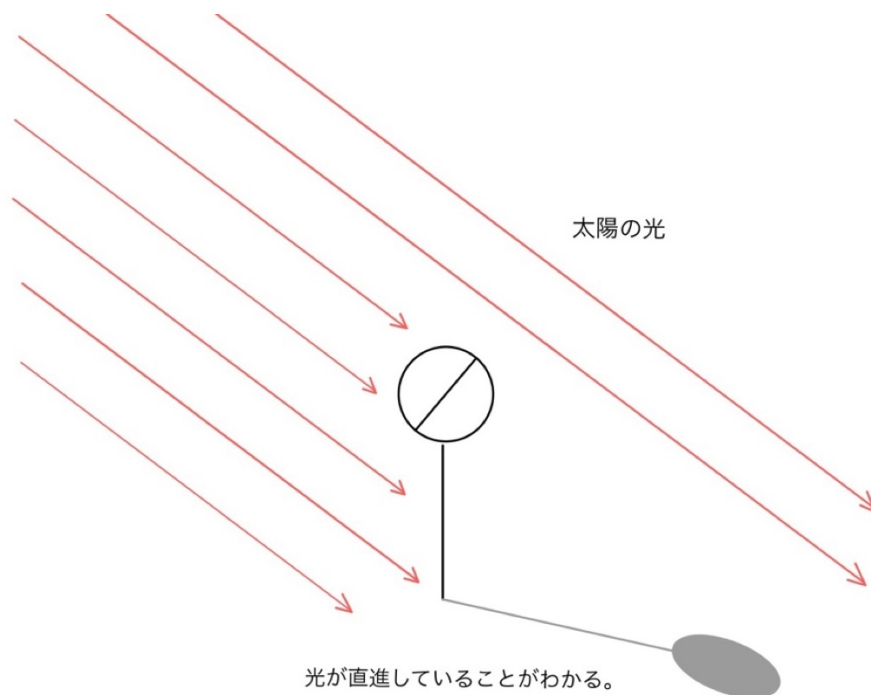


図2：光の直進

2.3 光の反射と屈折

直進してきた光を鏡に当てると、光は鏡の表面で向きを変えて進む。これを光の反射という。また、ガラスや水などの透明な物質に当たった光は、その表面で一部は反射するが、一部は内部に入り透過する。ガラスや水の表面と直角に光が当たった時は、反射光は入射光と同じ方向に反射し、透過光はまっすぐ内部を通りぬける。

水やガラスの表面に対して斜めに光が当たった時は、反射光は入射光と反対方向に反射し、内部を透過する光はその境界で折れ曲がって進む。これを光の屈折という。

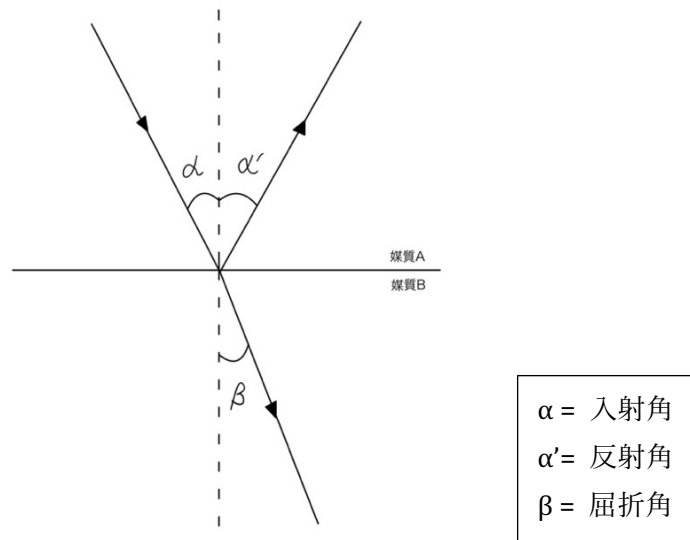


図3：光の反射と屈折率

上図は光の反射と屈折を表したものである。媒質 A を進んできた光が媒質 B との境界で一部が反射し、一部が屈折して媒質 B を透過する。 α 、 α' 、 β をそれぞれ入射角、反射角、屈折角という。この時以下の式が成り立つ。

$$\alpha = \alpha' \quad (\text{反射の法則})$$

$$n_{AB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (\text{屈折の法則})$$

ここで n_{AB} は媒質 A と媒質 B で定まる正定数であり（実は光の波長にも依存する—後述）、媒質 A に対する媒質 B の相対屈折率と呼ばれる。

反射の法則とは、入射角 α と反射角 α' は常に等しいという関係である。

屈折の法則（スネルの法則）とは、入射角 α と屈折角の β の \sin の比が常に一定の値（相対屈折率 n_{AB} ）になるということである。

相対屈折率 n_{AB} は、媒質 A 中の光速度を媒質 B 中の光速度（より正確には位相速度）で割った値で表される。

$$n_{AB} = \frac{\text{媒質 A 中での光速}}{\text{媒質 B 中での光速}}$$

光波が真空から媒質 a に進んだ場合の屈折率（つまり真空に対する媒質 a の相対屈折率）を媒質 a の絶対屈折率という。それを n_a で表すと

$$n_a = \frac{\text{真空中の光速}}{\text{媒質 a 中の光速}}$$

以上より

$$n_{AB} = \frac{n_B}{n_A}$$

が成り立つことがわかる。ゆえに各媒質の絶対屈折率だけを知っておけば、相対屈折率が求まる。特に媒質 A が空気の場合、 $n_A = 1.0003 \approx 1$ であるから、 n_{AB} は媒質 B の絶対屈折率にほぼ等しい（つまり $n_{AB} \approx n_B$ ）。

入射角 α と屈折角 β が等しければ、屈折率 n_{AB} は 1 となり、これは屈折が起こらないことを示す。

媒質 A が空気、媒質 B が水の場合、屈折光線は法線に近づく方向に折れ曲がるので、屈折角 β は入射角 α より小さくなる（ $\alpha > \beta$ ）。これは、分母の値が分子の値より小さいということなので、屈折率 n_{AB} は 1 より大きな値となる（ $n_{AB} > 1$ ）。

$n_A = 1.0003 \approx 1$ であるから、 $n_{AB} \approx n_B$ 。つまり n_{AB} は水の絶対屈折率と考えてよい。虹を考えると、空気に対する水の相対屈折率が必要になるが、以下では水の絶対屈折率で代用して議論する。

2.4 光の分散

太陽光など複数の波長を含む光がプリズムや水滴などに当たると様々な色に分散される。

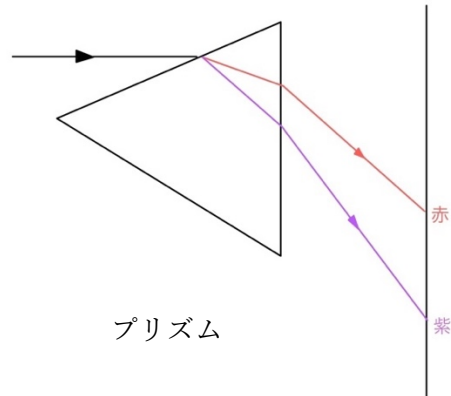


図 4：光の分散

太陽光線はプリズムの表面の A で屈折して、プリズムの内部に入り、もう一度プリズムの内から出る B で屈折して出ていく。この時外に出た光が当たるところに白い紙を置いておくと、赤から紫まで様々な光の色が連続して現れる。これは波長ごとの屈折率の違いによって異なる屈折角をとるため分散されるからである。赤色よりも紫色の方が屈折率が大きいので、大きく屈折する。光の分散は、色ごとの屈折率の違いによって起こる。(真空中の光の速さは光の波長によらないが、物質中の光の速さは波長によるので、屈折率は波長による。)

2.5 波長と屈折率

波長と水の屈折率には以下のような関係がある。ただし空気の絶対屈折率は 1 とする。（『理科年表』による）

| 色 | 赤 | 橙 | 黄 | 緑 | 青 | 藍 | 紫 |
|-------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 波長 λ (nm) | 6.563 | 5.893 | 5.800 | 5.461 | 4.861 | 4.340 | 3.968 |
| 屈折率 n | 1.3311 | 1.3330 | 1.3341 | 1.3345 | 1.3371 | 1.3404 | 1.3435 |

また、このデータから波長 λ と光の（水に対する相対）屈折率 $n=n(\lambda)$ の関係式を求めるために、Mathematica の場合は上の表に掲載されていない波長の光の屈折率は 3 次関数で補間する最小二乗フィット（ここでは 3 次関数）を用いる。

```
In[38]:= rambda := {{656.3, 1.3311}, {589.3, 1.3330}, {546.1, 1.3345}, {486.1, 1.3371}, {434.0, 1.3404}, {396.8, 1.3435}}
In[39]:= F = Fit[niji, {1,  $\lambda$ ,  $\lambda^2$ ,  $\lambda^3$ },  $\lambda$ ]
Out[39]:= 1.44846 - 0.000497972  $\lambda$  + 7.4442  $\times 10^{-7}$   $\lambda^2$  - 3.93318  $\times 10^{-10}$   $\lambda^3$ 
In[40]:= Show[ListPlot[rambda, PlotStyle -> Red], Plot[{F}, { $\lambda$ , 380, 780}]]
```

波長 λ に対する屈折率を近似計算する関数 $n(\lambda)$ を

$$n(\lambda) = 1.44846 - 0.000497972\lambda + 7.4442 \times 10^{-7}\lambda^2 - 3.93318 \times 10^{-10} \times \lambda^3$$

と計算する。（必要となる各波長における屈折率の値は 3 次関数に当てはめて計算する。）

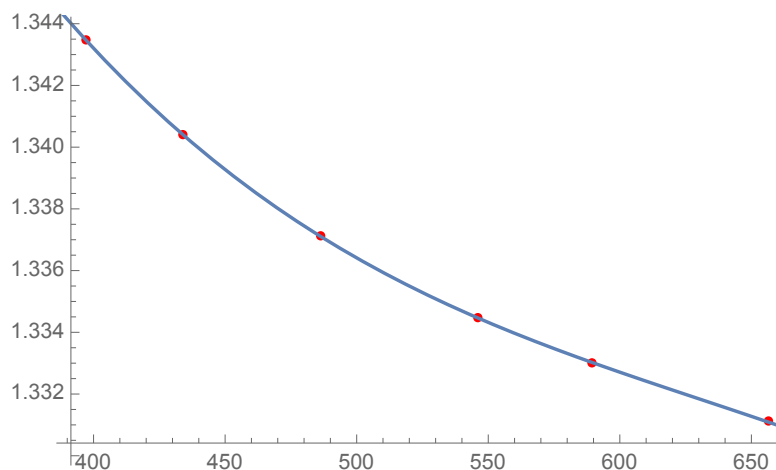


図 5：波長（単位は nm）ごとの屈折率のグラフ

このプログラムによって得られた上図は波長と屈折率の関係をグラフにしたものである。

第3章 水滴に当たった太陽光について

虹は、雨滴に当たった光の反射と屈折が関係している。ここで雨滴を丸い球形であると
する。空気中には無数の水滴があるはずだが、まず一個の水滴に当たった太陽光の反射
と屈折について述べる。

3.1 虹角

空気中で水滴に当たった太陽光は内部で複雑に反射と屈折を何度も繰り返している。水
滴に当たった光は様々な方向に撒き散らされ、これを散乱光という。主虹は水滴内で一
度反射した光によって作られる。水滴に当たった光の道筋を図で説明していく。

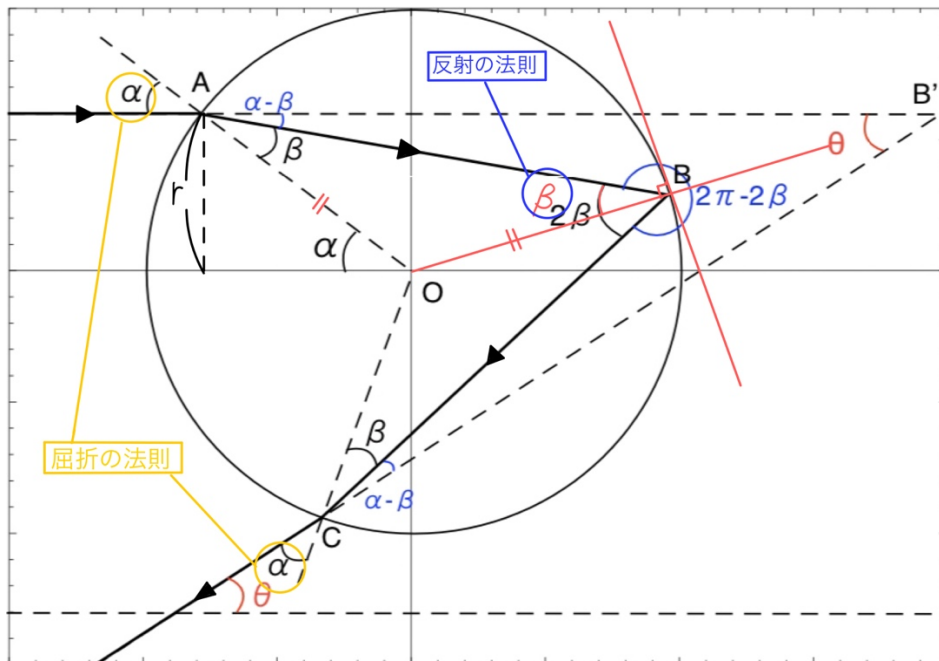


図6：水滴に当たった光の経路①

上図は水滴を球形とし、その断面について光が水滴内部で1回反射するときの経路を
模したものである。点 O を中心とする半径 1 の円を水滴の断面として考える。

水滴に当たった光の経路は、

点 A 【屈折】 → 点 B 【反射】 → 点 C 【再び屈折】 → 水滴外へ

である。

屈折率：n

点 A の y 座標：r

点 A での入射角： α

点 A での屈折角： β

射出された散乱光と太陽光のなす角： θ （この θ を散乱角と呼ぶ。）
とする。

このとき n、r、 α 、 β について以下の式が成り立つ。

$$\sin \alpha = r \Leftrightarrow \alpha = \sin^{-1} r$$

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{r}{n} \Leftrightarrow \beta = \sin^{-1} \frac{r}{n}$$

$$\left(\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} \text{ は屈折の法則} \right)$$

が成り立つ。

四角形 ABCB' について着目すると散乱角 θ は

$$\begin{aligned} \theta &= 4\beta - 2\alpha \\ &= 4\sin^{-1} \frac{r}{n} - 2\sin^{-1} r \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

① 式は入射位置 r と屈折率 n に対する散乱光の角度 θ を表す。

n=1.33、縦軸を θ 、横軸を r として $0 \leq r \leq 1$ の範囲でグラフを描画すると以下のグラフ 1 のようになる。

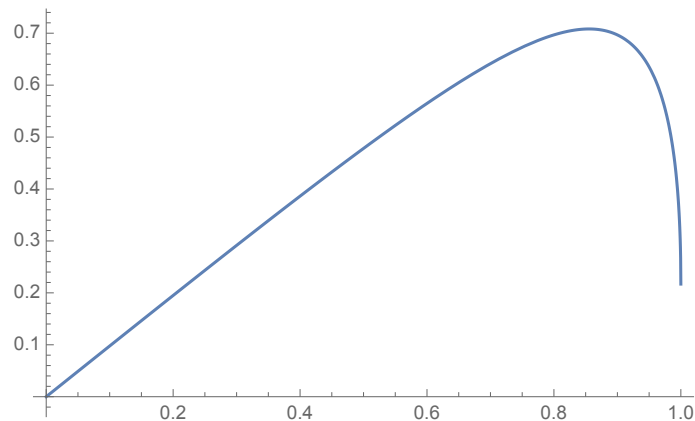


図 7：n=1.33 と固定した場合の $\theta(r)$ のグラフ

グラフの接線の傾きが 0 に近づくほど r の変化に対して θ の変化が小さくなるため散乱角 θ の光は強くなる。ここで 1 式の極値を求める。

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{4}{\sqrt{n^2 - r^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - r^2}} = 0$$

であるから、①式が極値（最大値）をとるときの r の値（屈折率に依存するので、間接的に波長に依存する） r^* は

$$r^* = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

またこのとき虹角（波長に依存する）はこの極値 $\theta(r^*) = \theta^*$ で

$$\theta^* = 4\sin^{-1}\sqrt{\frac{4 - n^2}{3n^2}} - 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。虹角は光が最も強く散乱される角度のことである。グラフ 2 は波長ごとの虹角を表したグラフである。波長が長くなるにつれて虹角は大きくなる。

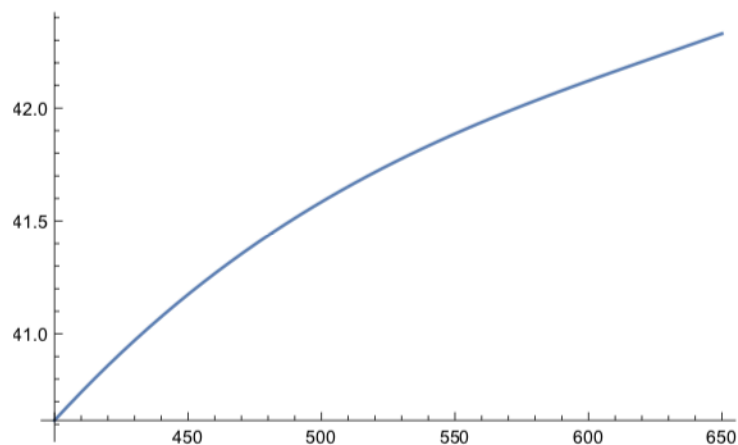


図 8：波長（単位は nm）ごとの虹角（単位は度）のグラフ

3.2 経路を描画する

水滴に当たった光の経路をより詳しく説明していく。

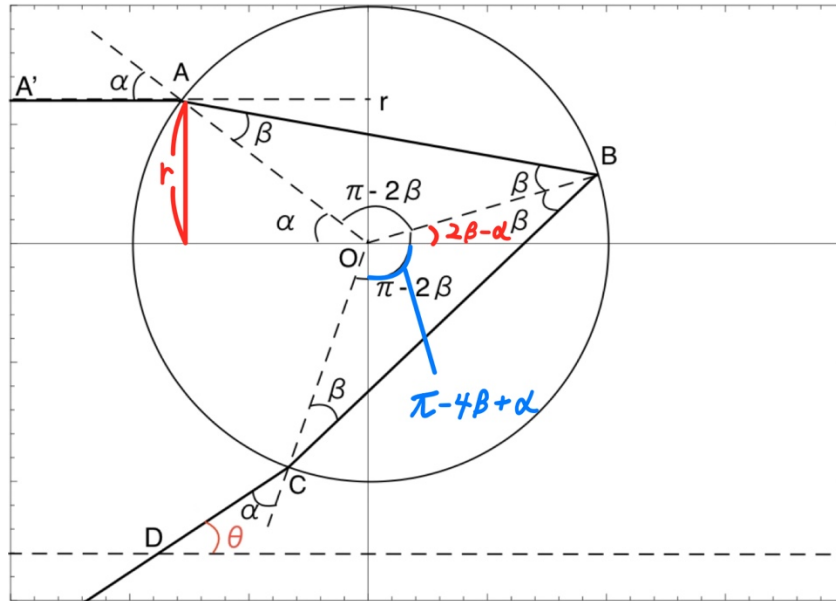


図 9：水滴に当たった光の経路②

先ほど使用した図を、円周上の点 A、B、C と中心 O をつないで得られる中心角に着目して整理した。すると点 A、B、C について

$$A = (-\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$B = (\cos(2\beta - \alpha), \sin(2\beta - \alpha))$$

$$C = (\cos(\pi + \alpha - 4\beta), -\sin(\pi + \alpha - 4\beta))$$

となる。また点 A' は点 A から左に水平に $x = -1.5$ 移動した点とする。点 D は点 C から左に $\cos \theta$ 、下に $\sin \theta$ 動いた点であるから、左に 1 動かしたとき下に $\tan \theta$ だけ動くので

$$A' = (-1.5, \sin \alpha)$$

$$D = (\cos(\pi + \alpha - 4\beta) - 1, -\tan(4\beta - 2\alpha) - \sin(\pi + \alpha - 4\beta))$$

とする。

各座標に $\alpha = \sin^{-1}r$ 、 $\beta = \sin^{-1}\frac{r}{n}$ を代入し、A'、A、B、C、D の順で各点を繋ぐ線を描画するプログラムを Mathematica で作成すると以下ようになる。このような虹の経路を示すのに岡田先輩のプログラムを参考にして、Module を用いてプログラムが見やすくなるように改造をした。

```
In[113]:= nijiline[r_, n_] := (* 入射位置 r と屈折率 n から得られる経路を定義 *)
Module[{alpha, beta, a, b, c, d}, alpha = ArcSin[r];
  [モジュール]                               [逆正弦]
  beta = ArcSin[r/n];
  [逆正弦]
  a = {-Sqrt[1 - r^2], r};
  [平方根]
  b = {Cos[2 beta - alpha], Sin[2 beta - alpha]};
  [余弦] [正弦]
  c = {Cos[Pi + alpha - 4 beta], -Sin[Pi + alpha - 4 beta]};
  [余弦] [円周率] [正弦] [円周率]
  d = {-1 + Cos[Pi + alpha - 4 beta],
  [余弦] [円周率]
  -Tan[4 beta - 2 alpha] - Sin[Pi + alpha - 4 beta]};
  [正接] [正弦] [円周率]
  Line[{{-1.5, r}, a, b, c, d}]}
  [線]

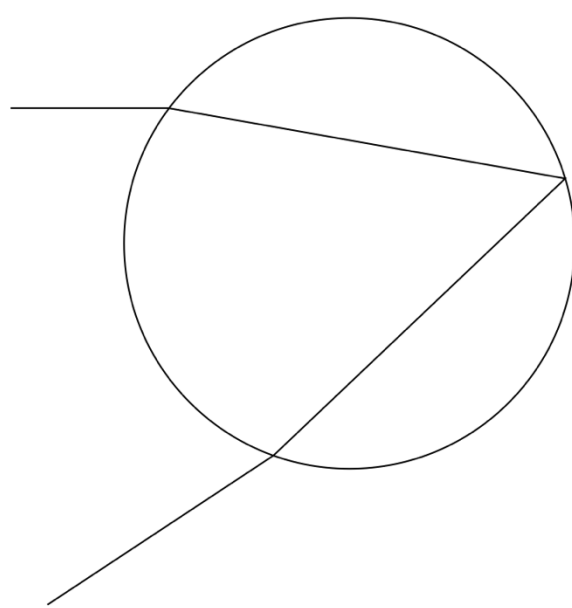
In[114]:= en = Graphics[Circle[{0, 0}, 1]] (* 水滴、中心(0,0) 半径1の円 *)
```

ここで、入射位置 $r = 0.6$, 屈折率 $n = 1.3311$ として描画してみる。

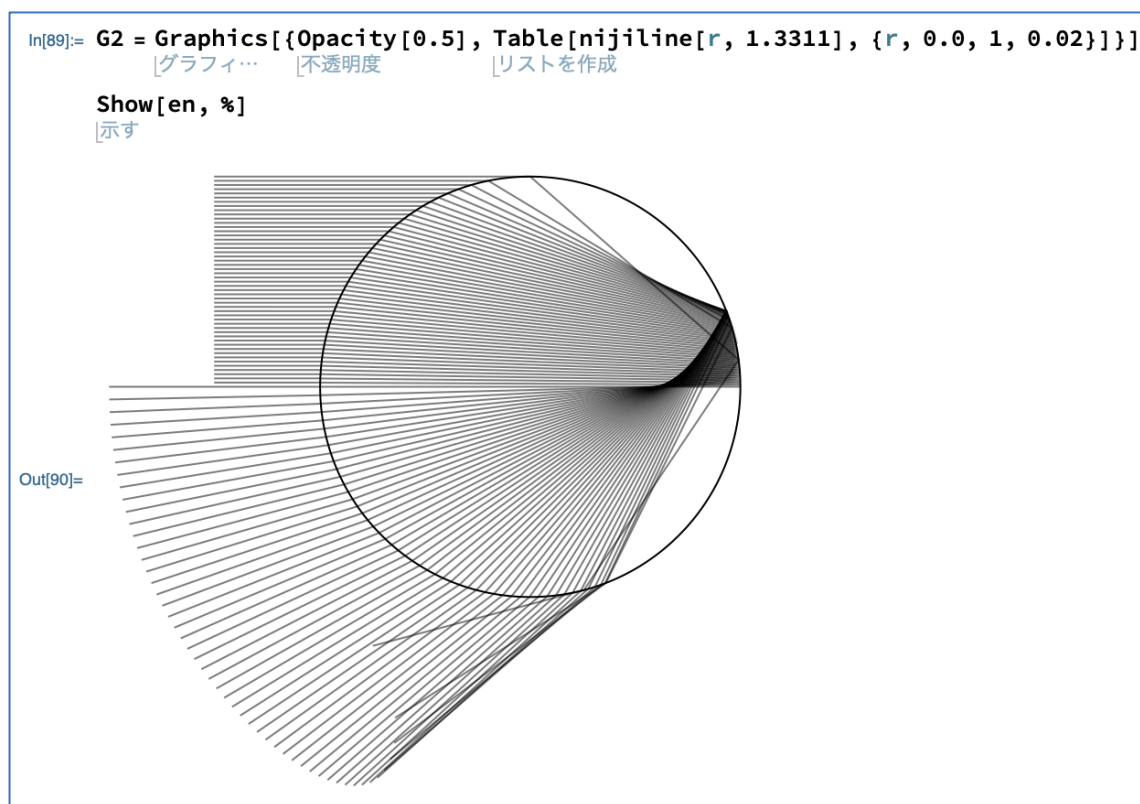
```
In[50]:= Graphics[nijiline[0.6, 1.3311]]
[グラフィックス]

In[51]:= Show[en, %]
[示す]

Out[51]=
```



次に、屈折角 $n = 1.3311$ とし、入射位置 r を $0 \leq r \leq 1$ の範囲で 0.02 ずつ変化させる。



岡田先輩のプログラムを参考に描画が見やすくなるように Opacity を使って経路の透明度を変えた。プログラムの結果から水滴の右下から出る線が重なっている様子がわかる。このとき散乱角は極値をとり、光の強さは無限大になる。

第4章 波長と色

4.1 色の認識

人間の目には光を感じる視細胞があり、その中でも錐体細胞によって色を認識している。錐体細胞には、L錐体(赤錐体)、M錐体(緑錐体)、S錐体(青錐体)と呼ばれ3つの細胞があり、それぞれ約560nm、530nm、430nm付近を中心にある程度の波長の光を感じる事ができる。この3種類の錐体が受ける刺激は目に入る光の波長によって変わり、脳はこの刺激の割合によって色を決めている。例えば、黄色の波長を持つ光が目に入ったとき、L錐体 M錐体が刺激を受け脳がその光が黄色だと判断する。しかし、赤と緑の光をある割合で混合すると黄色の波長の光が含まれていなくても、脳はその光を黄色と判断する。つまり同じ色でも1つの波長からなる光(単色光)による色の場合と、複数の波長の光が混合されて見えている色の場合がある。

4.2 色とディスプレイ

PCなどの一般的なディスプレイは様々な色を表示することができるが、その色に対応する様々な波長の光を発しているわけではない。ディスプレイに近づいてみるとわかるが、赤、緑、青の3色の光を任意の割合で混合し様々な色を表示している。この3つの色は人の目の錐体細胞の反応のピークに由来している。このR、G、Bの3色で色を表す方式をRGB表色系という。ディスプレイなどに用いられるのはsRGBと呼ばれる規格で機器などの違いによって表示される色に違いが出ないように定められたものである。ただこの規格は表示できる色の範囲が狭く、エメラルドグリーン、濃いシアン、オレンジ、明るい赤や黄色などの再現性は低い。

4.3 波長と RGB

波長から RGB それぞれの値を求めるため、CIE XYZ 表色系というものをを用いる。CIE XYZ 表色系とは色を定量的に表す基準として国際照明委員会(CIE)が1931年に定めたものである。RGB には様々な規格や機器による表示の違いがあるが、XYZ 表色系は規格や機器に依存しない色の表現方法である。理科年表「単色光の色度座標と等エネルギー単色放射の三刺激値」より波長 380nm~780nm の間で 10nm ごとの波長 λ に対する XYZ 三刺激値の値を得た。

| L(nm) | X | Y | Z |
|-------|--------|--------|--------|
| 380 | 0.0014 | 0 | 0.0065 |
| 390 | 0.0042 | 0.0001 | 0.0201 |
| 400 | 0.0143 | 0.0004 | 0.0679 |
| 410 | 0.0435 | 0.0012 | 0.2074 |
| 420 | 0.1344 | 0.004 | 0.6456 |
| 430 | 0.2839 | 0.0116 | 1.3856 |
| 440 | 0.3483 | 0.023 | 1.7471 |
| 450 | 0.3362 | 0.038 | 1.7721 |
| 460 | 0.2908 | 0.06 | 1.6692 |
| 470 | 0.1954 | 0.091 | 1.2876 |
| 480 | 0.0956 | 0.139 | 0.813 |
| 490 | 0.032 | 0.208 | 0.4652 |
| 500 | 0.0049 | 0.323 | 0.272 |
| 510 | 0.0093 | 0.503 | 0.1582 |
| 520 | 0.0633 | 0.71 | 0.0782 |
| 530 | 0.1655 | 0.862 | 0.0422 |
| 540 | 0.294 | 0.954 | 0.0203 |
| 550 | 0.4334 | 0.995 | 0.0087 |
| 560 | 0.5945 | 0.995 | 0.0039 |
| 570 | 0.7621 | 0.952 | 0.0021 |
| 580 | 0.9163 | 0.87 | 0.0017 |
| 590 | 1.0263 | 0.757 | 0.0011 |
| 600 | 1.0622 | 0.631 | 0.0008 |
| 610 | 1.0026 | 0.503 | 0.0003 |
| 620 | 0.8544 | 0.381 | 0.0002 |
| 630 | 0.6424 | 0.265 | 0 |
| 640 | 0.4479 | 0.175 | 0 |
| 650 | 0.2835 | 0.107 | 0 |
| 660 | 0.1649 | 0.061 | 0 |
| 670 | 0.0874 | 0.032 | 0 |
| 680 | 0.0468 | 0.017 | 0 |
| 690 | 0.0227 | 0.0082 | 0 |
| 700 | 0.0114 | 0.0041 | 0 |
| 710 | 0.0058 | 0.0021 | 0 |
| 720 | 0.0029 | 0.001 | 0 |
| 730 | 0.0014 | 0.0005 | 0 |
| 740 | 0.0007 | 0.0003 | 0 |
| 750 | 0.0003 | 0.0001 | 0 |
| 760 | 0.0002 | 0.0001 | 0 |
| 770 | 0.0001 | 0 | 0 |

XYZ 三刺激値を得られたが、実際に混で用いるのは RGB である。XYZ 三刺激値は以下の変換行列で sRGB に変換できる。

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2406 & -1.5372 & -0.4986 \\ -0.9689 & 1.8758 & 0.0415 \\ 0.0557 & -0.2040 & 1.0570 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

この変換行列によって得られた RGB の値を最大値が 1、負の値が 0 になるよう正規化する。また明るさの補正であるガンマ補正を $\gamma=2.2$ として行う。波長に対する R、G、B の値をそれぞれ LR、LG、LB として Mathematica に入力する。

```

In[10]:= LR := {{380, 0.032265391}, {390, 0.050250727}, {400, 0.088291233},
               {410, 0.145653236}, {420, 0.2403405}, {430, 0.326774085}, {440, 0.334348182},
               {450, 0.277518866}, {460, 0.10633414}, {470, 0}, {480, 0}, {490, 0}, {500, 0},
               {510, 0}, {520, 0}, {530, 0}, {540, 0}, {550, 0}, {560, 0.434269696},
               {570, 0.663881863}, {580, 0.827266787}, {590, 0.940208574}, {600, 0.999289005},
               {610, 1}, {620, 0.944423157}, {630, 0.837165862}, {640, 0.714739294},
               {650, 0.582629528}, {660, 0.456339314}, {670, 0.342300697}, {680, 0.257895756},
               {690, 0.185720118}, {700, 0.135858681}, {710, 0.099868562}, {720, 0.073206594},
               {730, 0.052410954}, {740, 0.037530381}, {750, 0.02618303}, {760, 0.020822159},
               {770, 0.017184874}, {780, 0}}

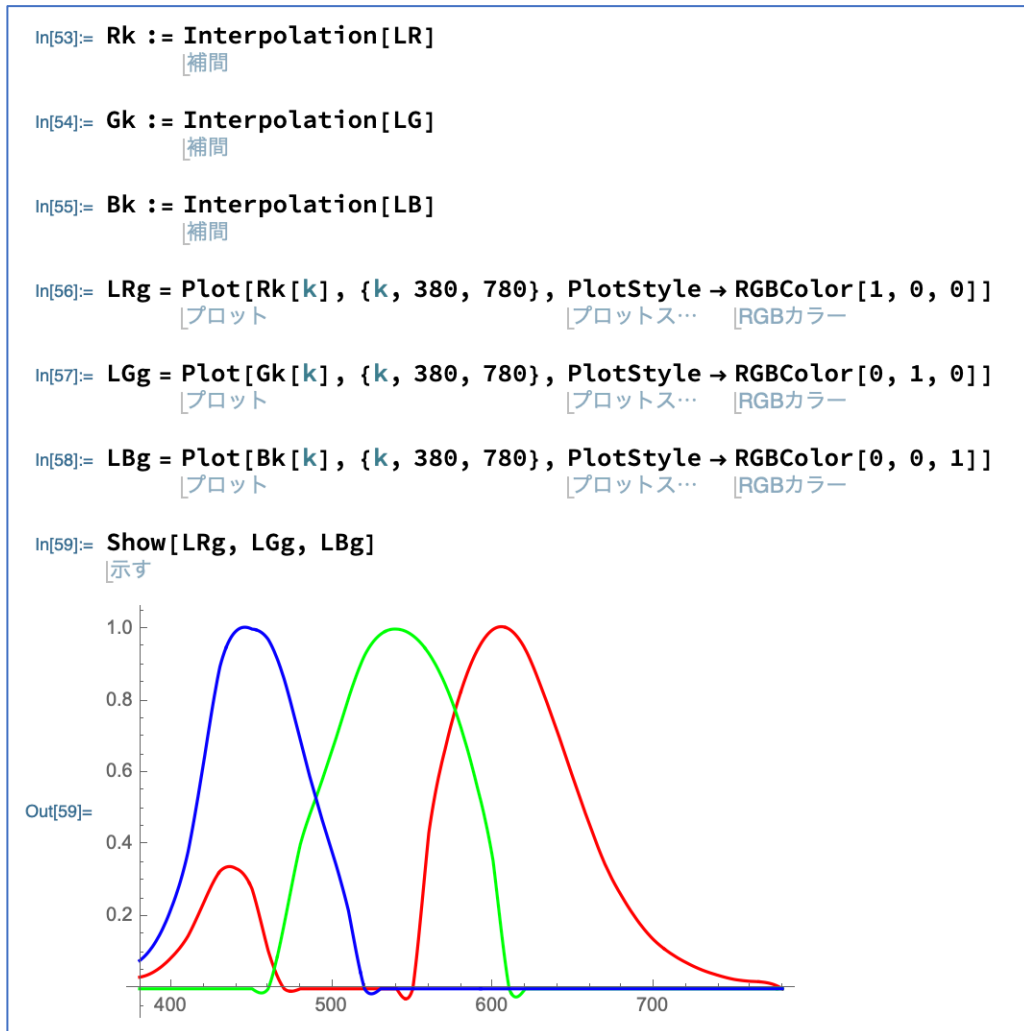
In[11]:= LG := {{380, 0}, {390, 0}, {400, 0}, {410, 0}, {420, 0}, {430, 0}, {440, 0},
               {450, 0}, {460, 0}, {470, 0.180488482}, {480, 0.401216396}, {490, 0.533897838},
               {500, 0.664445519}, {510, 0.807714516}, {520, 0.92683449}, {530, 0.985638731},
               {540, 1}, {550, 0.982105574}, {560, 0.932383793}, {570, 0.847997976},
               {580, 0.725990182}, {590, 0.563178341}, {600, 0.355311218}, {610, 0},
               {620, 0}, {630, 0}, {640, 0}, {650, 0}, {660, 0}, {670, 0}, {680, 0}, {690, 0},
               {700, 0}, {710, 0}, {720, 0}, {730, 0}, {740, 0}, {750, 0}, {760, 0}, {770, 0},
               {780, 0}}

LB := {{380, 0.07836206}, {390, 0.130823464}, {400, 0.227483698}, {410, 0.377876696},
       {420, 0.633078274}, {430, 0.895545041}, {440, 0.994508121}, {450, 1},
       {460, 0.971586169}, {470, 0.860374302}, {480, 0.691325922}, {490, 0.522178996},
       {500, 0.378252681}, {510, 0.216675823}, {520, 0}, {530, 0}, {540, 0},
       {550, 0}, {560, 0}, {570, 0}, {580, 0}, {590, 0}, {600, 0}, {610, 0}, {620, 0},
       {630, 0}, {640, 0}, {650, 0}, {660, 0}, {670, 0}, {680, 0}, {690, 0}, {700, 0},
       {710, 0}, {720, 0}, {730, 0}, {740, 0}, {750, 0}, {760, 0}, {770, 0}, {780, 0}}

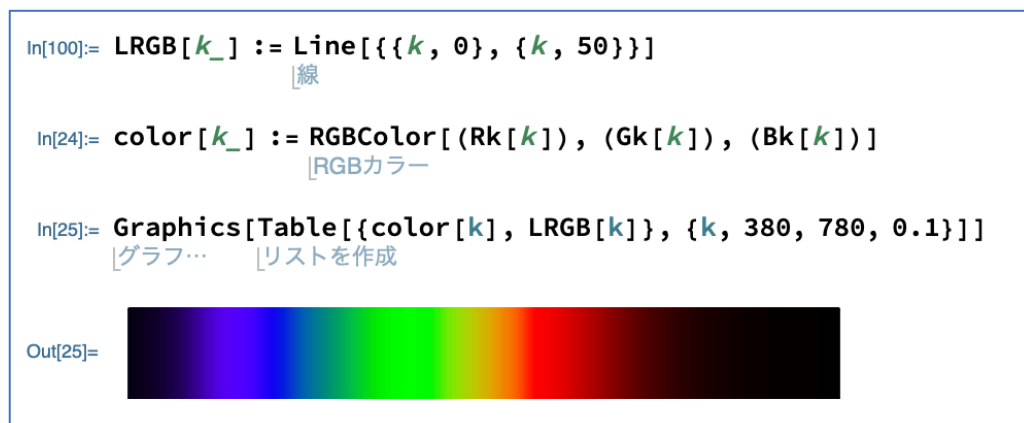
```

4.4 色の出力

第4章 4.3 で得られた R、G、B の値を補間し波長 λ について 380nm~780nm の間で色を対応させたグラフを描画すると以下のようなになる。



また、横軸の座標 λ に対応する色を縦の線として描画する。



4.5 七色で水滴に当たった光を描画する

ここでは Mathematica に用意されている ColorData[] を用いる。
ColorData["VisibleSpectrum"][k] とすると、波長が k nm 光の色が近似的に実現できる。

```
LRGB[k_] := Line[{{k, 0}, {k, 50}}]
Graphics[Table[{ColorData["VisibleSpectrum"][k], LRGB[k]}, {k, 380, 780, 0.1}]]
```

Out[]:= 

(1) 第2章 2.5 より波長 λ と屈折率 n の関係

$$n(\lambda) = 1.44846 - 0.000497972\lambda + 7.4442 \times 10^{-7}\lambda^2 - 3.93318 \times 10^{-10} \times \lambda^3$$

(2) 第3章 3.1 虹角をとるときの入射位置 r について

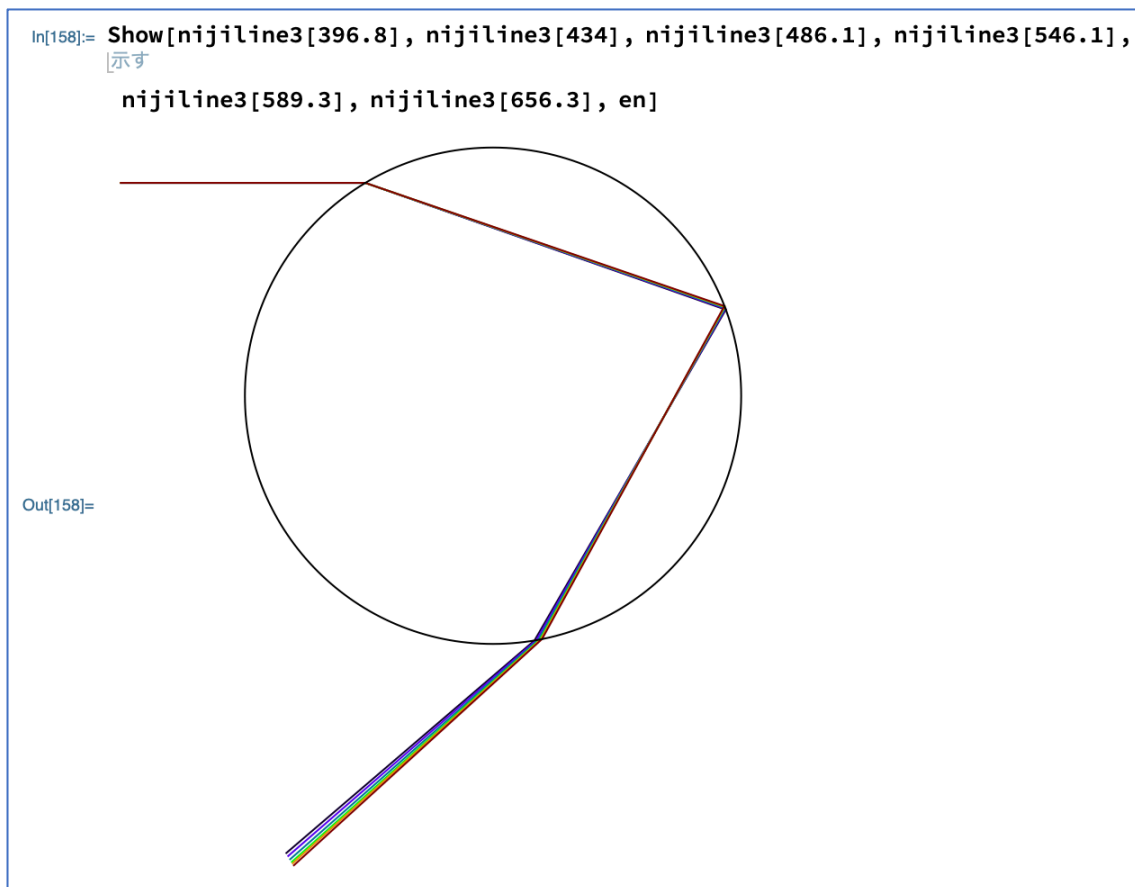
$$r^* = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

(3) Mathematica の ColorData

この(1)~(3)を第3章 3.2 のプログラムに反映させる。

```
In[154]:= n[k_] := 1.44846 - 0.000497972 * k + 7.4442 * 10 ^ (-7) * k ^ 2 - 3.93318 * 10 ^ (-10) * k ^ 3
In[155]:= r[k_] = Sqrt[4 - n[k] ^ 2] / Sqrt[3];
nijiline2[k_] := (*ある波長が虹角をとるときの経路を定義*)
Module[{alpha, beta, a, b, c, d}, {alpha = ArcSin[r[k]];
beta = ArcSin[r[k] / n[k]];
a = {-Sqrt[1 - r[k] ^ 2], r[k]};
b = {Cos[2 beta - alpha], Sin[2 beta - alpha]};
c = {Cos[Pi + alpha - 4 beta], -Sin[Pi + alpha - 4 beta]};
d = {-1 + Cos[Pi + alpha - 4 beta], -Tan[4 beta - 2 alpha] - Sin[Pi + alpha - 4 beta]};
Line[{{-1.5, r[k]}, a, b, c, d}]]
In[157]:= nijiline3[k_] := (*ある波長が虹角をとるときの経路と色を定義*)
Graphics[{{RGBColor[Rk[k]], (Gk[k]), (Bk[k])], AbsoluteThickness[1], nijiline2[k]}]}
```

上記のプログラムに第 2 章 2.5 のデータの波長を代入すると以下のような図が得られる。



以上で、1つの水滴に対しある波長 λ の光が当たったときその光が最も明るく散乱される角度、波長 λ の光の色とその経路を再現することができた。

第5章 虹のシミュレーション

5.1 円錐の円弧に沿ってできる虹

水滴に当たった太陽光線のうちで、ある決まった角度、虹角で射出してきた光線で虹が作られるということ、その角度は主虹の場合、赤色は約42度、紫色は約40度であることがわかった。主虹の赤色を例にして考えると、虹角は42度であるから、太陽が昇って地平線となす角度、太陽高度がこの虹角42度より高くなると、虹は地平線の下に隠れるので、虹は見えない。太陽高度が42度以下の時間帯なら、虹が見える可能性がある。その時間帯は緯度や季節によって違う。

地上から虹を見ると、虹は円錐の円弧に沿ってできるからアーチ型になる。地上で見る限り、最大でも半円の弧の虹で、それ以上大きな虹、丸い虹は見えない。観察者が立つ地面が、円弧の下半分と作るのを邪魔しているということになる。

空気中にある無数の水滴に当たった太陽光のひとつひとつが、この虹角を満足する光線として虹を形作ることになる。そうすると、虹は円錐の円弧に沿ってでき、頂点に目を置いた関係になる。(図9) 虹角42度を満足する曲線というのは、円錐の底面の円だけではない。円錐の表面上にある水滴なら、どこにある水滴から反射してきても42度を満足している。したがって、円錐の頂点にいる観測者と太陽、水滴の位置関係において、虹の形は、円や円弧の一部だけでなく、楕円、放物線、双曲線など、様々な形になる。

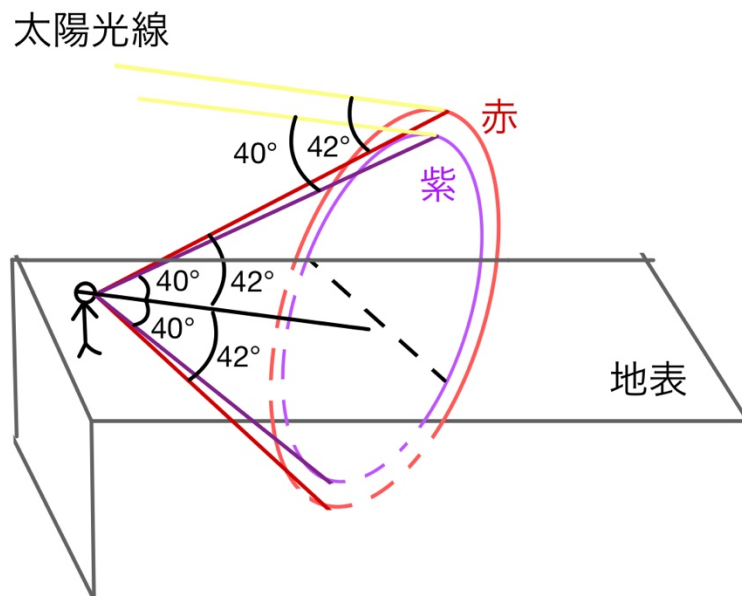


図10：円錐の円弧に沿ってできる虹

5.2 虹を平面に投影する

小円の半径を $\tan \theta(\lambda)$ と考えて図示する（太陽光線に垂直で、観測者から距離 1 にある平面に投影したと考える）。すなわちある定点を中心とする半径 $\tan \theta(\lambda)$ の円周に、波長 λ の色をつける。こうして得られたのが図 10 である。

```
In[82]:= niji2[k_] := Circle[{0, 0}, Tan[θ[k]], {Pi/4, 3 Pi/4}]  
          |円          |正接          |円周率   |円周率  
  
In[88]:= Graphics[Table[{Opacity[0.5], ColorData["VisibleSpectrum"][k], niji2[k]}, {k, 397, 656, 1}]]  
          |グラフ… |リス… |不透明度 |色データ
```



図 11：虹のシミュレーション

第6章 今後について

今回は主虹についての研究をした。

今後は、以下のような虹に関する他の現象について研究し、シミュレーションをしたい。
また自分で虹を作る実験もしてみたい。

- ・主虹の外側にできる色の薄い副虹について
- ・主虹と副虹との間の空が暗くなっている帯状の領域であるアレキサンダーの暗帯について
- ・満月前後の明るい月による月虹
- ・霧や雲に自分の影が映り、影の周りに円形の色づいた輝きができるブロッケン現象

参考文献

西條敏美

(2015)『授業 虹の科学－光の原理から人工虹のつくり方まで』 太郎次郎社エテ ィ
タス

武田康男

(2018)『虹の図鑑－しくみ、種類、観察方法』株式会社緑書房

岡田先輩のレポート

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/library/rainbow/2016-okada.pdf>