

マンデルブロー集合

2022年度桂田研究室卒業研究

総合数理学部 現象数理学科

4年2組38番

2610190057

堀地讓

2023年2月28日

目次

1	はじめに	3
2	マンデルブロー集合	4
2.1	マンデルブロー集合を定める漸化式	4
2.2	マンデルブロー集合の定義	6
2.3	マンデルブロー集合を描くためのアルゴリズム	7
2.3.1	Mを描くためのアルゴリズムの下準備	7
2.3.2	Mを描くためのプログラム	8
2.3.3	Mのプログラムの内容説明	9
2.3.4	Mのプログラムの実行結果とMの内点について	10
2.3.5	マンデルブロー集合の複雑性	12
2.4	アルゴリズムの正当化(マンデルブロー集合に関する命題の証明)	14
2.4.1	$(\exists c \in \mathbb{C})(\exists k \in \mathbb{N}) C_k(c) > 2 \rightarrow c \notin M$ の証明	14
2.4.2	$M \subset \{c \in \mathbb{C} : c \leq 2\}$ の証明	18
2.4.3	Mは \mathbb{C} の閉集合であることの証明	19
2.4.4	Mは実軸対称であることの証明	19
2.4.5	$M \cap \mathbb{R} = \left[-2, \frac{1}{4}\right]$ の証明	20
3	まとめ	26
[付録]	コッホ曲線	27
A-1.	アフィン変換	27
A-2.	回転移動	27
A-3.	コッホ曲線を生成するための相似変換	28
A-4.	コッホ曲線の定義	29
A-5.	コッホ曲線を定義通りに作成するプログラムと実行結果	33
4	参考文献	35

1 はじめに

「長さが無限大の曲線」、「面積が0の平面図形」等といった、中学高校等で学習した滑らかな曲線や曲面とは非常に異なる性質を有する図形が存在することは昔から知られていた。しかしこうした図形は長らく「病的」な例外と考えられており、重要な研究対象となることはなかった。その状況が変わったのは1970年代であった。マンデルブローは自然界に存在する多くの物質・物体がむしろそうした「病的」な図形こそ基本構造に持つことを指摘し、そうした図形一般を「フラクタル」と呼んだのである。(梶野 [6] p. 1)

さて、なぜマンデルブロー集合について学習したいと思ったのかを述べる。それはマンデルブロー集合の境界を拡大し続ける動画を見て、非常に不思議で印象的に感じたからである。以下がその動画のリンクである。(Wikipedia [4])

https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set#/media/File:Mandelbrot_sequence_new.gif

そして先ほどの動画の一部を下に載せる。

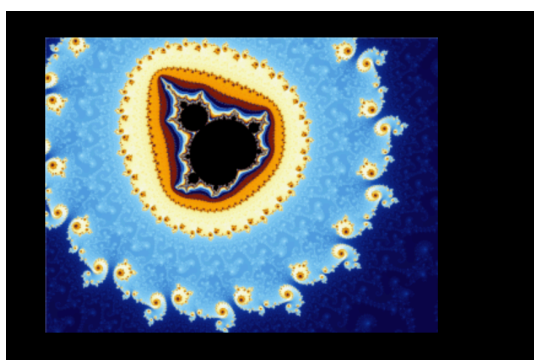


図 1: その 1

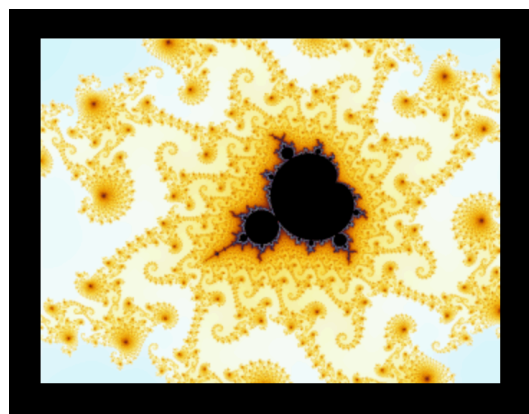


図 2: その 2

ここから本題に入っていくが、マンデルブロー集合は複素力学系と非常に関係が深い。複素力学系とは一般にある複素関数 f を用いて

$$C_{n+1} = f(C_n)$$

と表せる複素点列 $\{C_n\}$ について考えることを言う(石村・石村 [3] p. 228)。

今回は、 $c \in \mathbb{C}$ として、

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = z^2 + c$$

で定義される f を考える。

今回の卒業研究では川平 [1] の 1.1 章から 1.3 章までを読み解いた。

2 マンデルブロー集合

2.1 マンデルブロー集合を定める漸化式

$c \in \mathbb{C}$ に対し、次の漸化式で定まる複素数列 $\{C_n\}_{n \geq 0}$ を考える。

$$C_0 = 0; C_{n+1} = C_n^2 + c \quad (n = 0, 1, \dots) \quad \dots (C)$$

数列 $\{C_n\}$ は c の値に依存するので、各項を $C_n(c)$ と表現すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} C_0(c) &= 0 \\ C_1(c) &= C_0(c)^2 + c = c \\ C_2(c) &= c^2 + c \\ C_3(c) &= (c^2 + c)^2 + c \\ C_4(c) &= ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c \\ &\dots \end{aligned}$$

この数列 $\{C_n(c)\}_{n \geq 0}$ が複素平面 \mathbb{C} 上でどのように動き回るかを考える。実際に c に値を入れてみる。

(1) $c = 0$ のとき

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad C_n(0) = 0$$

となる。つまり数列 $\{C_n(0)\}_{n \geq 0}$ は原点から全く動かない。

(2) $c = 1$ のとき数列 $\{C_n(1)\}_{n \geq 0}$ は、

$$0, 1, 2, 5, 26, 677, 458330, \dots$$

となり、正の無限大に発散する。つまり数列 $\{C_n(1)\}_{n \geq 0}$ は、実軸上を非常に早いスピードで右に駆け抜けていく (この証明は、後の補題 2.17 から得られる。)

(3) $c = i$ のとき数列 $\{C_n(i)\}_{n \geq 0}$ は、

$$C_0(i) = 0$$

$$C_1(i) = C_0(i)^2 + i = i$$

$$C_2(i) = C_1(i)^2 + i = i^2 + i = -1 + i$$

$$C_3(i) = C_2(i)^2 + i = (-1 + i)^2 + i = 1 - 2i - 1 + i = -i$$

$$C_4(i) = C_3(i)^2 + i = (-i)^2 + i = -1 + i$$

$$C_5(i) = C_4(i)^2 + i = (-1 + i)^2 + i = 1 - 2i - 1 + i = -i$$

...

となる。これは1項目と2項目は0と*i*であるが、3項目以降は $-1 + i$ と $-i$ を交互に移動することを表している。このことを一般化すると次のようになる。

定理 2.1.

$$C_0(i) = 0, C_1(i) = i, C_{2m}(i) = -1 + i, C_{2m+1}(i) = -i \quad (m \in \mathbb{N})$$

(証明)

$C_0(i) = 0, C_1(i) = i$ は確認済みである。以下の補題を証明する。

補題 2.2.

$$(1) \quad C_{2m}(i) = -1 + i \quad (m \in \mathbb{N})$$

である。

(補題の証明) 数学的帰納法で証明する。

(i) $m = 1$ のとき

$$C_2(i) = C_1(i)^2 + i = -1 + i$$

より成り立つ。

(ii) $m = k$ ($k \in \mathbb{N}$) のとき (1) が成り立つと仮定、つまり

$$C_{2k}(i) = -1 + i$$

が成り立つと仮定する。 $m = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} C_{2k+2}(i) &= C_{2k+1}(i)^2 + i \\ &= (C_{2k}(i) + i)^2 + i \\ &= ((-1 + i)^2 + i)^2 + i \\ &= (1 - 2i - 1 + i)^2 + i \\ &= (-i)^2 + i \\ &= -1 + i \end{aligned}$$

となるので、 $m = k + 1$ のときも成り立つ。

以上より補題 2.2 が証明された。 ■

そして補題 2.2 を用いると、 $m \in \mathbb{N}$ において

$$\begin{aligned} C_{2m+1}(i) &= C_{2m}(i)^2 + i \\ &= (-1 + i)^2 + i \\ &= 1 - 2i - 1 + i \\ &= -i \end{aligned}$$

となるので、定理 2.1 が示された。 ■

2.2 マンデルブロー集合の定義

複素数を要素とする集合

$$\{c \in \mathbb{C} : |C_n(c)| \rightarrow \infty\}$$

を H_∞ で表し、それを複素平面 \mathbb{C} から除いたもの

$$\mathbb{M} := \mathbb{C} - H_\infty$$

をマンデルブロー集合と定義する。一言で言うならば、

$$\mathbb{M} := \{c \in \mathbb{C} : |C_n(c)| \not\rightarrow \infty\}$$

である。

2.3 マンデルブロー集合を描くためのアルゴリズム

2.3.1 \mathbb{M} を描くためのアルゴリズムの下準備

$$\mathbb{M} = \{c \in \mathbb{C} : |C_n(c)| \not\rightarrow \infty\}$$

が \mathbb{M} の定義ではあるが、 $|C_n(c)|$ を無限個計算しなくてはならないので、 $|C_n(c)|$ の行く末を見届けることは出来ない。妥協案として以下の命題を使用し、 $c \in \mathbb{M}$ であるか否かを判断する。

命題 (川平 [1], p. 11 命題 1.1)

ある $c \in \mathbb{C}$ に対し、 $|C_k(c)| > 2$ となる自然数 k があれば、 $|C_n(c)|$ は無限大に発散する。すなわち、 $c \notin \mathbb{M}$ である。逆に $c \notin \mathbb{M}$ であれば、 $|C_k(c)| > 2$ となる自然数 k が必ず存在する。

つまり、すべての自然数 n に対して、 $|C_n(c)|$ を計算して無限大に発散するかどうかを調べるのではなく、ある $c \in \mathbb{C}$ に対し、 $|C_k(c)| > 2$ となる自然数 k が存在するか否かで $c \in \mathbb{M}$ を判断する、ということである。この後の章 2.4.1 で証明する。この命題を踏まえ \mathbb{M} を描くアルゴリズムを組み立てると以下ようになる。

十分大きな M に対し、

$$\forall n (0 \leq n \leq M) \quad |C_n(c)| \leq 2$$

ならば、 $c \in \mathbb{M}$ と判断し、一方で、

$$\exists n (0 \leq n \leq M) \quad |C_n(c)| > 2$$

ならば、 $c \notin \mathbb{M}$ である。

本来ならば計算回数を ∞ にして \mathbb{M} を描きたいところだが、プログラミングにおいて ∞ を扱うことは不可能なので、十分大きな値 M を設定して妥協する。

2.3.2 Mを描くためのプログラム

以下のプログラムは、上で準備したアルゴリズムをPythonで実装したものである。(奥村 [2]、Mandelbrotset.py と保存する。)

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

M = 100

def mandel(c):
    k = 0
    z = 0
    while k < M and abs(z) < 2:
        z = z ** 2 - c
        k += 1
    return k

vmandel = np.vectorize(mandel)

x, y = np.meshgrid(np.linspace(-1, 2.2, 640), np.linspace(-1.2, 1.2, 480))
z = vmandel(x + y * 1j)

plt.pcolormesh(x, y, z, cmap='RdGy', vmin=0, vmax=M)
plt.axis('scaled')
plt.show()
```


2.3.3 M のプログラムの内容説明

```
M = 100
```

```
def mandel(c):  
    k = 0  
    z = 0  
    while k < M and abs(z) < 2:  
        z = z ** 2 - c  
        k += 1  
    return k
```

```
vmandel = np.vectorize(mandel)
```

z は川平 [1] の $C_n(c)$ を指す。 k は、川平 [1] の $C_n(c)$ の n を指す。この関数は n を 0 からスタートさせ 1 ずつ増やしていき $M - 1$ まで、 $|C_n(c)| < 2$ の間、漸化式 (C) に沿って計算を続ける。 k という値を返すということは、 $n = 0, 1, \dots, k$ までは $|C_n(c)| < 2$ であったが、 $n = k$ で $|C_k(c)| \geq 2$ となったということである。そして `mandel(c)` をベクトル化した関数を `vmandel` と定義する。

```
x, y = np.meshgrid(np.linspace(-1, 2.2, 640), np.linspace(-1.2, 1.2, 480))  
z = vmandel(x + y * 1j)
```

```
plt.pcolormesh(x, y, z, cmap='RdGy', vmin=0, vmax=M)  
plt.axis('scaled')  
plt.show()
```

`x, y = np.meshgrid(np.linspace(a,b, L), np.linspace(c,d, N))` と一般化して説明する。 $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ という領域において、 $b-a$ を $L-1$ 等分、 $c-d$ を $N-1$ 等分し、 LN 個の格子点を作成している。そして `vmandel(x + y * 1j)` で平面上の点 (x, y) を複素平面に変換する。次に `plt.pcolormesh(x, y, z, cmap='RdGy', vmin=0, vmax=M)` で $0 \leq n \leq M$ において、発散マップを作成している。最後に座標軸を調整し、描画する。

川平 [1] の M の定義に従うならば、 $z = z ** 2 - c$ の $-$ を $+$ に変える必要があるので $+$ に変えて実行する。しかし $+$ に変えて実行すると、 M の全体図が欠けてしまうので x 軸の調整が必要である。今回は、 $-2.5 \leq x \leq 0.7$ と設定した。

以上の変更を加えたプログラムが以下である。(Mandelbrotset2.py と保存する。)

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

M = 100

def mandel(c):
    k = 0
    z = 0
    while k < M and abs(z) < 2:
        z = z ** 2 + c
        k += 1
    return k

vmandel = np.vectorize(mandel)

x, y = np.meshgrid(np.linspace(-2.5, 0.7, 640), np.linspace(-1.2, 1.2, 480))
z = vmandel(x + y * 1j)

plt.pcolormesh(x, y, z, cmap='RdGy', vmin=0, vmax=M)
plt.axis('scaled')
plt.show()
```

2.3.4 M のプログラムの実行結果と M の内点について

ターミナルで `python Mandelbrotset2.py` と打つと実行される。実行結果は以下である。

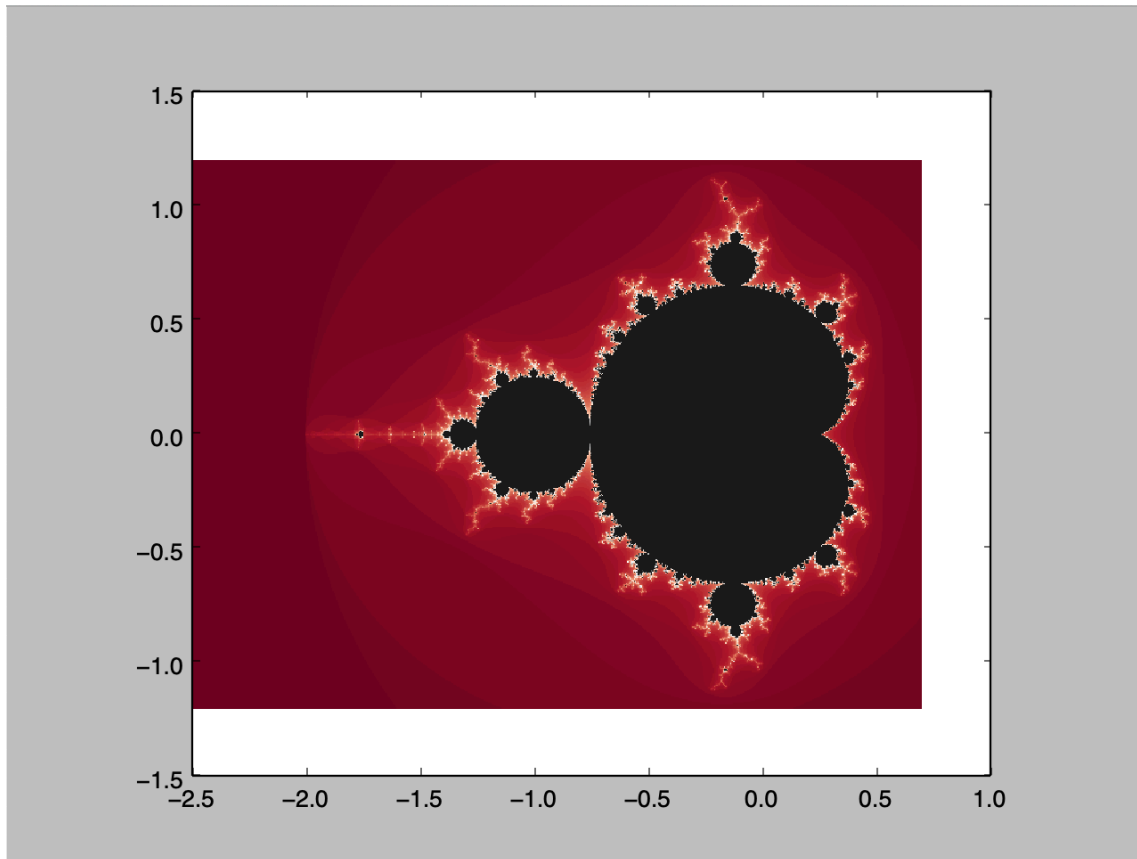


図 1.3

図 1.3 の黒い領域全体が M である (向後 [9])。ここで開円盤の定義をしてから内点の定義を述べる。

定義 2.3. $c \in \mathbb{C}, r > 0$ に対して、開円盤 $D(c; r)$ を次式で定める。

$$D(c; r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < r\}$$

次に内点の定義をする。

定義 2.4.

$$z \in A \text{ が } A \text{ の内点} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad D(z; \varepsilon) \subset A$$

実は、 M の内点は周期解を持つ。そして M の内点の集合は無限個の共通部分のない領域に分かれるということも分かっている。(佐藤 [7], p. 22, 藤村 [8], p. 6)

2.3.5 マンデルブロー集合の複雑性

ここで、 M の一部を拡大するとどのような図形が現れるかを3枚見せる。計算回数 L は 1000 とし、 $(700 \times 700 =) 490000$ 個の格子点を作成して描画した。

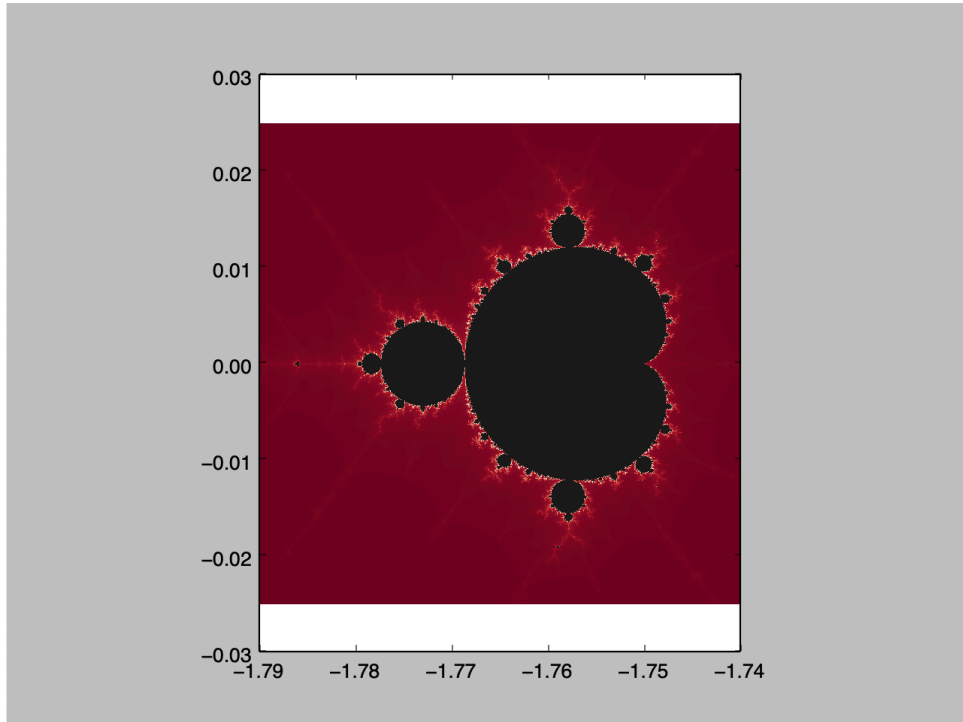


図 1.3-1 : 描画領域は $-1.79 \leq x \leq -1.74$, $-0.025 \leq y \leq 0.025$

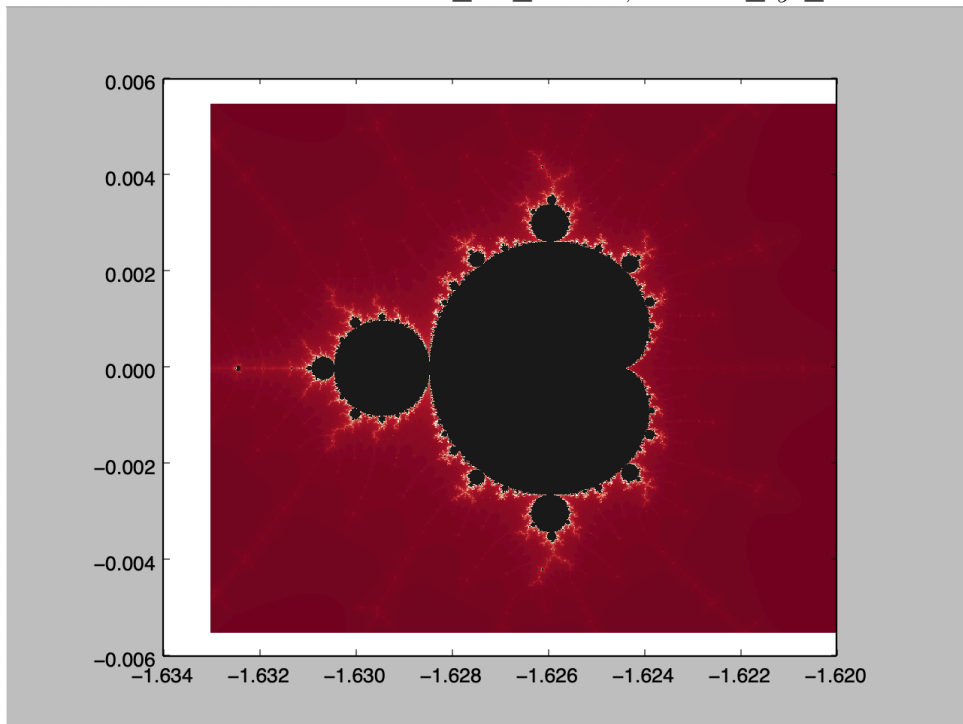


図 1.3-2 : 描画領域は $-1.633 \leq x \leq -1.62$, $-0.0055 \leq y \leq 0.0055$

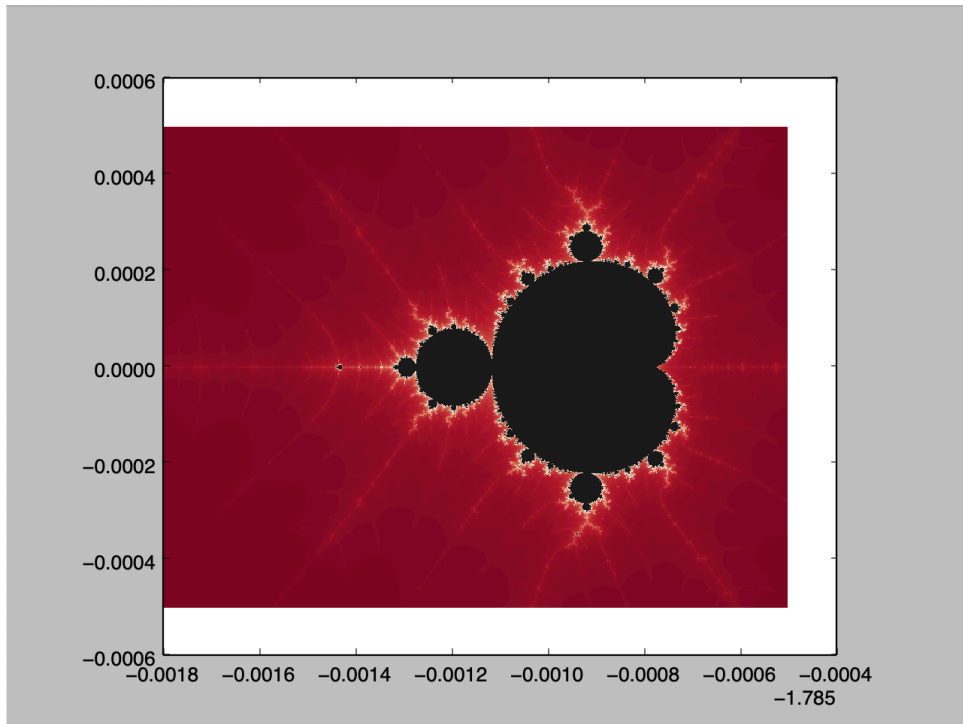


図 1.3-3 : 描画領域は $-1.7868 \leq x \leq -1.7855$, $-0.0005 \leq y \leq 0.0005$

この3枚の写真を見ればわかる通り M を拡大しても全体図 (図 1.3) と同じような図形が現れるのである。

中学高校で習った曲線、例えば放物線は折れ線の近似であるから放物線の一部を拡大すると直線が見えたりする。しかし、マンデルブロー集合は全体図を拡大すると全体図と同じような図形が現れるので非常に複雑であり不思議な集合である。

2.4 アルゴリズムの正当化 (マンデルブロー集合に関する命題の証明)

2.4.1 $(\exists c \in \mathbb{C})(\exists k \in \mathbb{N}) |C_k(c)| > 2 \rightarrow c \notin M$ の証明

命題 2.5 (再掲). ある $c \in \mathbb{C}$ に対し、 $|C_k(c)| > 2$ となる自然数 k があれば、 $|C_n(c)|$ は無限大に発散する。すなわち、 $c \notin M$ である。逆に $c \notin M$ であれば、 $|C_k(c)| > 2$ となる自然数 k が必ず存在する。

(前半部分の証明)

$$C_0(c) = 0; C_{n+1}(c) = C_n(c)^2 + c \quad (n = 0, 1, \dots) \cdots (C)$$

この命題を証明するために、 $|c| > 2$ と $|c| \leq 2$ で場合分けする。ここで以下の補題を2つ証明する。

補題 2.6. $|c| > 2$ のとき

$$(2) \quad |C_{n+1}(c)| > |C_n(c)| > 2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

である。

(証明) 数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} |C_2(c)| &= |C_1(c)^2 + c| \\ &\geq |C_1(c)^2| - |c| \\ &= |C_1(c)|^2 - |C_1(c)| \\ &= (|C_1(c)| - 1)|C_1(c)| \\ &= (|c| - 1)|C_1(c)| \end{aligned}$$

$|c| > 2$ より、 $|c| - 1 > 1$ だから、 $(|c| - 1)|C_1(c)| > |C_1(c)| > 2$ より、

$$|C_2(c)| > |C_1(c)| > 2$$

となるから成り立つ。

(ii) $1 \leq n \leq l$ ($l \in \mathbb{N}$) のとき (2) が成り立つ、つまり、

$$|C_{i+1}(c)| > |C_i(c)| > 2 \quad (|C_i(c)| > -|C_{i+1}(c)|)$$

が成り立つと仮定する。 $n = l + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} |C_{l+2}(c)| &= |C_{l+1}(c)^2 + c| \\ &\geq |C_{l+1}(c)|^2 - |c| \\ &= |C_{l+1}(c)|^2 - |C_1(c)| \\ &\dots \\ &> |C_{l+1}(c)|^2 - |C_{l+1}(c)| \\ &= (|C_{l+1}(c)| - 1)|C_{l+1}(c)| \end{aligned}$$

となる。ここで、 $|C_{l+1}(c)| > 2$ であり、 $|C_{l+1}(c)| - 1 > 1$ より、 $(|C_{l+1}(c)| - 1)|C_{l+1}(c)| > |C_{l+1}(c)| > 2$ となり、

$$|C_{l+2}(c)| > |C_{l+1}(c)| > 2$$

が成り立つ。ゆえに、 $|c| > 2$ において、補題 2.6 が成り立つ。■

補題 2.7. $|c| \leq 2$ のとき

$$(3) \quad |C_{n+1}(c)| > |C_n(c)| > 2 \quad (n : 2 \text{ 以上の自然数})$$

である。

(証明) 数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n = k$ ($k : 2$ 以上の自然数) のとき

$$\begin{aligned} |C_{k+1}(c)| &= |C_k(c)^2 + c| \\ &\geq |C_k(c)^2| - |c| \\ &= |C_k(c)|^2 - |C_k(c)| \\ &= (|C_k(c)| - 1)|C_k(c)| \end{aligned}$$

となる。 $|C_k(c)| > 2$ より、 $|C_k(c)| - 1 > 1$ だから、 $|C_{k+1}(c)| > |C_k(c)| > 2$ が成り立つ。

(ii) $k \leq n \leq m$ ($m : k$ 以上の自然数) のとき (3) が成り立つ、つまり、

$$|C_{m+1}(c)| > |C_m(c)| > 2$$

が成り立つと仮定する。 $n = m + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} |C_{m+2}(c)| &= |C_{m+1}(c)^2 + c| \\ &\geq |C_{m+1}(c)|^2 - |c| \\ &= |C_{m+1}(c)|^2 - |C_k(c)| \\ &\dots \\ &> |C_{m+1}(c)|^2 - |C_{m+1}(c)| \\ &= (|C_{m+1}(c)| - 1)|C_{m+1}(c)| \end{aligned}$$

となる。ここで、 $|C_{m+1}(c)| > 2$ であり、 $|C_{m+1}(c)| - 1 > 1$ より、 $(|C_{m+1}(c)| - 1)|C_{m+1}(c)| > |C_{m+1}(c)| > 2$ となり、

$$|C_{m+2}(c)| > |C_{m+1}(c)| > 2$$

が成り立つ。ゆえに、 $|c| \leq 2$ において、補題 2.7 が成り立つ。■

準備が整ったので、 $|c| > 2$ と $|c| \leq 2$ で場合分けして証明する。

(I) $|c| > 2$ のとき

漸化式 (C) より

$$|c| > 2 \Leftrightarrow |C_1(c)| > 2$$

となる。補題 2.6 より、

$$|C_{n+1}(c)| > |C_n(c)| \geq |c| (> 2) \quad (n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ。最後に

$$|C_{n+1}(c)| \geq (|C_n(c)| - 1)|C_n(c)| \geq (|c| - 1)|C_n(c)|$$

であるから、繰り返し不等式評価をすると、

$$\begin{aligned} |C_{n+1}(c)| &\geq (|c| - 1)|C_n(c)| \\ &\geq (|c| - 1) \cdot (|c| - 1) \cdot |C_{n-1}(c)| \\ &\geq (|c| - 1) \cdot (|c| - 1) \cdot (|c| - 1) \cdot |C_{n-2}(c)| \\ &\dots \\ &\geq (|c| - 1)^n \cdot |C_1(c)| \end{aligned}$$

である。 $|c| > 2$ から $|c| - 1 > 1$ であるから、 $n \rightarrow \infty$ とすると、 $|C_{n+1}(c)| \rightarrow \infty$ となるので、 $|c| > 2$ のとき、 $|C_n(c)|$ は無限大に発散する。■

(II) $|c| \leq 2$ のとき

ある自然数 k が存在し、 $|c| \leq 2 < |C_k(c)|$ つまり、 $|c| < |C_k(c)|$ が成り立つ。 $k = 1$ では、 $|c| = |C_1(c)|$ となってしまうので、2 以上の自然数 k に対し、 $|c| < |C_k(c)|$ となる k が存在すると仮定する。補題 2.7 より、

$$|C_{n+1}(c)| > |C_n(c)| \geq |C_k(c)| > 2$$

が成り立つ。最後に

$$|C_{n+1}(c)| \geq (|C_n(c)| - 1)|C_n(c)| \geq (|C_k(c)| - 1)|C_n(c)|$$

であるから繰り返し不等式評価をすると、

$$\begin{aligned}
 |C_{n+1}(c)| &\geq (|C_k(c)| - 1)|C_n(c)| \\
 &\geq (|C_k(c)| - 1) \cdot (|C_k(c)| - 1) \cdot |C_{n-1}(c)| \\
 &\geq (|C_k(c)| - 1) \cdot (|C_k(c)| - 1) \cdot (|C_k(c)| - 1) \cdot |C_{n-2}(c)| \\
 &\dots \\
 &\geq (|C_k(c)| - 1)^n \cdot |C_1(c)|
 \end{aligned}$$

となる。 $|C_k(c)| > 2$ から $|C_k(c)| - 1 > 1$ であるから、 $n \rightarrow \infty$ とすると、 $|C_{n+1}(c)| \rightarrow \infty$ となるので、 $|c| \leq 2$ のとき、 $|C_n(c)|$ は無有限大に発散する。■

以上の議論から、命題 2.5 の前半部分は示された。■

(後半部分の証明)

\mathbb{M} の定義より

$$c \notin \mathbb{M} \Leftrightarrow c \in H_\infty \Leftrightarrow |C_n(c)| \rightarrow \infty$$

であるから、 $|C_k(c)| > 2$ となる自然数 k が必ず存在するので、命題 2.5 の後半部分は示された。■

したがって、命題 2.5 は示された。■

2.4.2 $\mathbb{M} \subset \{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\}$ の証明

系 2.8 (川平 [1], p. 11 系 1.2). マンデルブロー集合 \mathbb{M} は絶対値 2 以下の範囲に含まれる。すなわち集合 $X := \{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\}$ とすると、

$$\mathbb{M} \subset X$$

となる。

(証明)

$$\mathbb{M} \subset X \Leftrightarrow (c \in \mathbb{M} \rightarrow c \in X) \Leftrightarrow (c \notin X \rightarrow c \notin \mathbb{M})$$

より、 $c \notin X \rightarrow c \notin \mathbb{M}$ を示せば良い。 $c \notin X$ つまり $|c| > 2$ ならば、 $|C_1(c)| > 2$ となり、命題 2.5 より $c \notin \mathbb{M}$ となる。したがって、 $\mathbb{M} \subset X$ となる。■

2.4.3 M は \mathbb{C} の閉集合であることの証明

系 2.9 (川平 [1], p. 15 系 1.3). マンデルブロー集合 M は複素平面 \mathbb{C} の閉集合である。

(証明)

補集合 $\mathbb{C} - M = H_\infty$ が開集合であることを示せば良い。 $c \in H_\infty$ とすると、ある k が存在して、 $|C_k(c)| > 2$ を満たす。ここで関数 $c' \mapsto |C_k(c')|$ は、 c' の多項式の絶対値なので連続である。つまり、

$$(4) \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall c' \in \mathbb{C} : |c' - c| < \delta) \quad ||C_k(c')| - |C_k(c)|| < \varepsilon$$

である。

$c' \in D(c; \delta)$ とすると、 $\varepsilon = \frac{|C_k(c)| - 2}{2} > 0$ に対し、(4) を満たすような δ をとると、(4) より

$$-\varepsilon < |C_k(c')| - |C_k(c)| < \varepsilon$$

が成り立ち、 $|C_k(c)| - \varepsilon < |C_k(c')|$ となる。また、

$$\begin{aligned} |C_k(c)| - \varepsilon - 2 &= |C_k(c)| - \frac{|C_k(c)| - 2}{2} - 2 \\ &= \frac{2|C_k(c)| - |C_k(c)| + 2 - 4}{2} \\ &= \frac{|C_k(c)| - 2}{2} \\ &= \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

より、 $|C_k(c)| - \varepsilon > 2$ が成り立つ。したがって、 $2 < |C_k(c)| - \varepsilon < |C_k(c')|$ より、 $|C_k(c')| > 2$ が分かるので、 $c' \in H_\infty$ である。これより $|C_k(c')| > 2$ ならば、 $D(c; \delta) \subset H_\infty$ となるため、 H_∞ が開集合であることが示された。よって M は \mathbb{C} の閉集合である。■

2.4.4 M は実軸対称であることの証明

命題 2.10 (川平 [1], p. 17 練習問題). マンデルブロー集合 M は実軸に関して対称である。

(証明)

$$C_0(c) = 0; C_{n+1}(c) = C_n(c)^2 + c \quad (n = 0, 1, \dots) \cdots (C)$$

$$\mathbb{M} := \{c \in \mathbb{C} : |C_n(c)| \neq \infty\}$$

ここで以下の補題を証明する。 \bar{c} は c の共役である。

補題 2.11.

$$(5) \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad C_n(\bar{c}) = \overline{C_n(c)}$$

が成り立つ。

(証明) 数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n = 0$ の時

$$C_0(\bar{c}) = 0 = \overline{C_0(c)}$$

であるから成り立つ。

(ii) $n = k$ の時、(5)が成り立つと仮定する。つまり

$$C_k(\bar{c}) = \overline{C_k(c)}$$

と仮定する。 $n = k + 1$ の時

$$C_{k+1}(\bar{c}) = C_k(\bar{c})^2 + \bar{c} = \left(\overline{C_k(c)}\right)^2 + \bar{c} = \overline{C_k(c)^2 + c} = \overline{C_{k+1}(c)}$$

となるので、(5)が成り立つ。したがって、補題 2.11 が示された。■

命題の証明に戻る。補題 2.11 から

$$|C_n(\bar{c})| = \left| \overline{C_n(c)} \right| = |C_n(c)|$$

が成り立つ。 $c \in \mathbb{M}$ とすると $|C_n(c)| \neq \infty$ となり、 $|C_n(\bar{c})| \neq \infty$ が分かるので、 $\bar{c} \in \mathbb{M}$ となる。よって、 \mathbb{M} は実軸に関して対称である。■

2.4.5 $\mathbb{M} \cap \mathbb{R} = \left[-2, \frac{1}{4}\right]$ の証明

命題 2.12 (川平 [1], p. 17 命題 1.4). \mathbb{M} と \mathbb{R} との共通部分は、区間 $\left[-2, \frac{1}{4}\right]$ である。とくに、 \mathbb{M} は空集合ではない。

(証明)

$$C_0(c) = 0; C_{n+1}(c) = C_n(c)^2 + c \quad (n = 0, 1, \dots) \cdots (C)$$

最初に、

$$\left[-2, \frac{1}{4}\right] \subset \mathbb{M} \cap \mathbb{R}$$

を示す。

$c \in \left[-2, \frac{1}{4}\right]$ とする。 $-2 \leq c \leq 0, 0 \leq c \leq \frac{1}{4}$ と場合分けして考える。

(I) $-2 \leq c \leq 0$ のとき

最初に以下の補題を証明する。

補題 2.13. $-2 \leq c \leq 0$ の時

$$c^2 + c \leq |c|$$

が成り立つ。

(証明)

まず $(c^2 + c)^2$ と $|c|^2$ の大小比較をする。

$$\begin{aligned}(c^2 + c)^2 - |c|^2 &= (c^2 + c)^2 - c^2 \\ &= (c(c+1))^2 - c^2 \\ &= c^2(c+1)^2 - c^2 \\ &= c^2((c+1)^2 - 1) \\ &= c^2(c^2 + 2c) \\ &= c^3(c+2)\end{aligned}$$

となる。ここで、 $c^3 < 0, c+2 \geq 0$ であり、 $c^3(c+2) \leq 0$ となるから

$$(c^2 + c)^2 \leq |c|^2$$

である。したがって

$$-|c| \leq c^2 + c \leq |c|$$

が成り立つ。■

補題 2.13 を利用して以下の定理を証明する。

定理 2.14. $-2 \leq c \leq 0$ の時

$$(6) \quad c \leq C_n(c) \leq c^2 + c \quad (n \in \mathbb{N})$$

が成り立ち、実数列 $\{C_n(c)\}_{n \geq 0}$ は無限大に発散しない。

(証明) 数学的帰納法で証明する。

(i) $n = 1$ の時

まず、 $C_1(c) = c$ である。 $c^2 \geq 0$ より、 $c^2 + c \geq c$ であるから、 $C_1(c) \leq c^2 + c$ である。よって、

$$c \leq C_1(c) \leq c^2 + c$$

が成り立つ。

(ii) $n = k$ の時、(6) が成り立つと仮定、つまり

$$c \leq C_k(c) \leq c^2 + c$$

が成り立つと仮定する。ここで補題 2.13 を使うと、

$$c \leq C_k(c) \leq |c|$$

となる。今回は、 $c = -|c|$ であるから、

$$-|c| \leq C_k(c) \leq |c| \Leftrightarrow |C_k(c)| \leq |c|$$

となるので、

$$0 \leq C_k(c)^2 \leq c^2$$

が言える。ゆえに

$$c \leq C_k(c)^2 + c \leq c^2 + c$$

となり、

$$c \leq C_{k+1}(c) \leq c^2 + c$$

であるから、 $n = k + 1$ の時も成り立つ。

よって定理 2.14 が示された。■

よって $-2 \leq c \leq 0$ のとき、 $c \in \mathbb{M} \cap \mathbb{R}$ が言えた。

(II) $0 \leq c \leq \frac{1}{4}$ のとき

以下の 2 つの補題を示す。

補題 2.15. $c \geq 0$ のとき、実数列 $\{C_n(c)\}_{n \geq 0}$ は単調増加である。すなわち、

$$(7) \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad C_n(c) \leq C_{n+1}(c)$$

である。

まず、 $c \geq 0$ のとき、

$$(8) \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad C_n(c) \geq 0$$

である。ここから数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n = 0$ のとき

$C_0(c) = 0, C_1(c) = C_0(c)^2 + c = c$ で、 $0 \leq c$ だから $C_0(c) \leq C_1(c)$ が成り立つ。

(ii) $n = k$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) のとき (7) が成り立つ、つまり

$$(9) \quad C_k(c) \leq C_{k+1}(c)$$

が成り立つと仮定する。 $n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} C_{k+2}(c) - C_{k+1}(c) &= (C_{k+1}(c)^2 + c) - (C_k(c)^2 + c) \\ &= C_{k+1}(c)^2 - C_k(c)^2 \\ &= (C_{k+1}(c) - C_k(c)) \cdot (C_{k+1}(c) + C_k(c)) \\ &= (C_{k+1}(c) - C_k(c)) \cdot (C_k(c)^2 + c + C_k(c)) \end{aligned}$$

となる。ここで、(8) を用いると、

$$C_k(c)^2 + c + C_k(c) \geq 0$$

が言える。また (9) より $C_{k+1}(c) - C_k(c) \geq 0$ だから、

$$\begin{aligned} (C_{k+1}(c) - C_k(c)) \cdot (C_k(c)^2 + c + C_k(c)) \geq 0 &\Leftrightarrow C_{k+2}(c) - C_{k+1}(c) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow C_{k+2}(c) \geq C_{k+1}(c) \end{aligned}$$

となり、 $n = k + 1$ の時にも (7) は成り立つ。

以上の議論より補題 2.15 が成り立つ。■

補題 2.16. $0 \leq c \leq \frac{1}{4}$ のとき、

$$(10) \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad 0 \leq C_n(c) \leq \frac{1}{2}$$

が成り立つ。

(証明) 数学的帰納法で証明する。

(i) $n = 0$ のとき

$C_0(c) = 0 \leq \frac{1}{2}$ であるから、 $0 \leq C_0(c) \leq \frac{1}{2}$ が成り立つ。

(ii) $n = k$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) のとき (10) が成り立つ、つまり

$$(11) \quad 0 \leq C_k(c) \leq \frac{1}{2}$$

が成り立つと仮定する。そして $n = k + 1$ のときにも成り立つことを示す。

まず (11) より、

$$0 \leq C_k(c)^2 \leq \frac{1}{4}$$

が成り立つ。また、 $0 \leq c \leq \frac{1}{4}$ であるから、

$$0 \leq C_k(c)^2 + c \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

となり、

$$0 \leq C_{k+1}(c) \leq \frac{1}{2}$$

となる。ゆえに $n = k + 1$ の時にも (10) が成り立つ。

以上の議論より補題 2.16 が成り立つ。■

よって、補題 2.15, 2.16 から $0 \leq c \leq \frac{1}{4}$ のとき実数列 $\{C_n(c)\}_{n \geq 0}$ は上に有界な単調増加数列であることがわかるので、極限值が存在することがわかる。その極限値を x とすると、

$$x = x^2 + c$$

を満たしている。

以上の議論から $|C_n(c)|$ は無限大に発散しないので、 $c \in \left[-2, \frac{1}{4}\right]$ ならば、 $c \in \mathbb{M} \cap \mathbb{R}$ であるから

$$\left[-2, \frac{1}{4}\right] \subset \mathbb{M} \cap \mathbb{R}$$

が示された。

次に、

$$\mathbb{M} \cap \mathbb{R} \subset \left[-2, \frac{1}{4}\right]$$

を示す。

$c \in \mathbb{M} \cap \mathbb{R}$ とすると、 $\mathbb{M} \subset \{c \in \mathbb{M} : |c| \leq 2\}$ (系 2.8) であるから、

$$-2 \leq c \leq 2$$

である。

ここで以下の補題を示す。

補題 2.17. $c > \frac{1}{4}$ のとき、実数列 $\{C_n(c)\}_{n \geq 0}$ は正の無限大に発散する。

(証明)

背理法を用いて証明する。つまり $c > \frac{1}{4}$ のとき、実数列 $\{C_n(c)\}_{n \geq 0}$ は上に有界であると仮定する。

一般に $c \geq 0$ のとき、実数列 $\{C_n(c)\}_{n \geq 0}$ は単調増加であるから、 $c > \frac{1}{4}$ の時も単調増加である。すると、実数列 $\{C_n(c)\}_{n \geq 0}$ は上に有界な単調増加列となり収束するので、極限を x とすると、 $x = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n(c)$ は、

$$(12) \quad x = x^2 + c$$

を満たしている。

しかし方程式 (12) の解が存在する条件は、(12) の判別式を D とすると、

$$D = 1 - 4c \geq 0 \Leftrightarrow -4c \geq -1 \Leftrightarrow c \leq \frac{1}{4}$$

であるから仮定と矛盾する。よって補題 2.17 が示された。■

したがって、 $c \in \mathbb{M} \cap \mathbb{R}$ ならば、 $-2 \leq c \leq \frac{1}{4}$ となり、

$$\mathbb{M} \cap \mathbb{R} \subset \left[-2, \frac{1}{4}\right]$$

が示された。

以上の議論から

$$\mathbb{M} \cap \mathbb{R} = \left[-2, \frac{1}{4}\right]$$

が示された。■

3 まとめ

マンデルブロー集合の定義から始まり、 $|C_n(c)| > 2$ となるような自然数 n があるか否かで $c \in M$ を判断するようなプログラムを作ってマンデルブロー集合 M を描くことができた。他にも M は絶対値 2 以下の範囲に含まれるということ、そして M は複素平面 \mathbb{C} の閉集合であることも証明できた。

[付録] コッホ曲線

マンデルブロー集合を勉強する前にコッホ曲線についても勉強した。(H. ザーガン [5], p. 183, p. 184 9.1 例題)

A-1. アフィン変換

行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

と列ベクトル

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

が与えられたとき、平面上の点 $P = (x, y)$ に次の式で定まる点 $P' = (x', y')$ を対応させる写像 f のことを言う。

$$(13) \quad f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

A-2. 回転移動

平面上の任意の点 $P = (x, y)$ を、原点を中心に角 θ だけ左回りに回転移動し、移動後の点を $P' = (x', y')$ とする。 P と P' の座標の間には、

$$(14) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つ。つまり (13) で、

$$a_{11} = \cos \theta, \quad a_{12} = -\sin \theta, \quad a_{21} = \sin \theta, \quad a_{22} = \cos \theta, \quad a = b = 0$$

とすれば (14) が得られる。

A-3. コッホ曲線を生成するための相似変換

紹介する相似変換は4つあり、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) & -\sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) & \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は平面上の座標を表し、それぞれ説明すると

- (1) : 原点を相似の中心として、相似比 $\frac{1}{3}$ にする変換
- (2) : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を原点のまわりに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し、次に x 軸に平行に $\frac{1}{3}$ 移動する変換
- (3) : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を原点のまわりに $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転し、次に x 軸に平行に $\frac{1}{2}$ 、 y 軸に平行に $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 移動する変換
- (4) : 原点を相似の中心として、相似比 $\frac{1}{3}$ にし、 x 軸に平行に $\frac{2}{3}$ 移動する変換

である。

A-4. コッホ曲線の定義

$t \in [0, 1]$ なる実数とし、 $\varphi_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を平面上の座標とする。

コッホ曲線の定義

$$\varphi_0(t) = (t, 0) \quad (t \in [0, 1])$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ について、

$$\varphi_{n+1}(t) = \begin{cases} f_1(\varphi_n(4t)), t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ f_2(\varphi_n(4t - 1)), t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right] \\ f_3(\varphi_n(4t - 2)), t \in \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right] \\ f_4(\varphi_n(4t - 3)), t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

f_1, f_2, f_3, f_4 は以下の変換である。

$$f_1: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f_2: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_3: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) & -\sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) & \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$

$$f_4: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

A-5. コッホ曲線を定義通りに作成するプログラムと実行結果

次のプログラムは、A-4 で述べた定義を C++ と GLSC3D で実装したものである。(Koch-Curve.cpp と保存する。)

```

#include <iostream>
#include <glsc3d_3.h>
#include <math.h>
#include <Eigen/Dense>

using namespace Eigen;

#define XW_MIN -0.125 //x 座標の最小値
#define XW_MAX 1.1 //x 座標の最大値
#define YW_MIN -0.1 //y 座標の最小値
#define YW_MAX 1.1 //y 座標の最大値

//VectorXd v : xy 平面ベクトル v を用意。A-3 の (x y) を指す。

//A-3 の (1)
VectorXd f1(VectorXd v){
    VectorXd f_1(2);
    f_1(0) = v(0) / 3.0;
    f_1(1) = v(1) / 3.0;
    return f_1;
}

//A-3 の (2)
VectorXd f2(VectorXd v){
    VectorXd f_2(2), rotate(2);
    rotate(0) = cos(M_PI/3.0)*v(0) - sin(M_PI/3.0)*v(1);
    rotate(1) = sin(M_PI/3.0)*v(0) + cos(M_PI/3.0)*v(1);
    f_2(0) = rotate(0)/3.0+1.0/3.0;
    f_2(1) = rotate(1)/3.0+0.0;
    return f_2;
}

//A-3 の (3)
VectorXd f3(VectorXd v){
    VectorXd f_3(2), rotate(2);
    rotate(0) = cos(-M_PI/3.0)*v(0) - sin(-M_PI/3.0)*v(1);

```

```

    rotate(1) = sin(-M_PI/3.0)*v(0) + cos(-M_PI/3.0)*v(1);
    f_3(0) = rotate(0)/3.0+1.0/2.0;
    f_3(1) = rotate(1)/3.0+sqrt(3.0)/6.0;
    return f_3;
}

//A-3 の (4)
VectorXd f4(VectorXd v){
    VectorXd f_4(2);
    f_4(0) = v(0)/3.0+2.0/3.0;
    f_4(1) = v(1)/3.0+0.0;
    return f_4;
}

//  $\phi_{n+1}(t)$  を求める式 (コッホ曲線の定義)
VectorXd phi(int n, double t){
    VectorXd phi0(2);

    if(n==0){
        phi0(0) = t;
        phi0(1) = 0.0;
        return phi0;
    }
    else{
        if(t<=0.25)
            return f1(phi(n-1,4*t));
        else if(t<=0.5)
            return f2(phi(n-1,4*t-1));
        else if(t<=0.75)
            return f3(phi(n-1,4*t-2));
        else
            return f4(phi(n-1,4*t-3));
    }
}

int main(void)

```

```

{
    int N = 10000;
    VectorXd t(N+1),x(N+1),y(N+1);
    VectorXd v(2);

    //初期設定
    //x(i),y(i) はA-3 の (x' y') を表す。
    for(int i=0 ; i<=N ; i++)
    {
        t(i) = (double)i/N;
        x(i) = 0.0;
        y(i) = 0.0;
    }

    for(int i=0 ; i<=N ; i++)
    {
        v = phi(10,t(i));//10回計算を実行
        x(i) = v(0);    y(i) = v(1);//計算した値を x(i),y(i) に格納
    }

    //画面の初期設定処理
    g_init("Koch Curve",800.0, 800.0);

    //描画領域を  $XW\_MIN \leq v(0) \leq XW\_MAX$ ,  $YW\_MIN \leq v(1) \leq YW\_MAX$  と
    指定
    g_def_scale_2D(1, XW_MIN, XW_MAX, YW_MIN, YW_MAX, 10.0, 10.0, 780.0, 780.0);
    g_cls();
    g_sel_scale(1);

    //線の種類を決定
    g_line_width(1);
    g_scr_color(1.0, 1.0, 1.0);
    g_line_color(0.0, 0.0, 1.0, 1.0);
    g_line_width(1.5);

    //座標 (x(i), y(i)) と座標 (x(i+1), y(i+1)) を線で結ぶ。

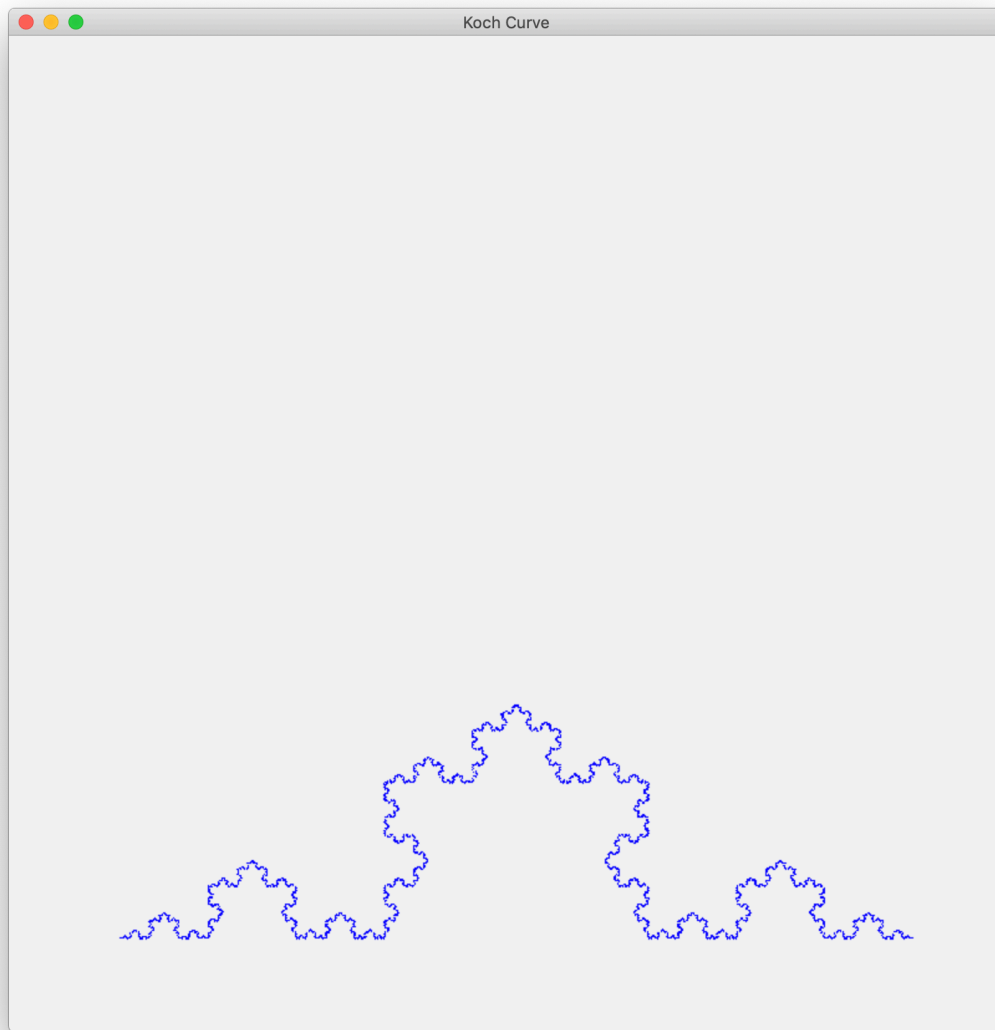
```



```
for(int i=0 ; i<=N-1 ; i++)
{
    g_move_2D(x(i), y(i));
    g_plot_2D(x(i+1), y(i+1));
}
g_finish();//描画

g_sleep(-1.0);
return 0;
}
```

ターミナルで `ccg Koch-Curve.cpp` と打った後、`./Koch-Curve` と打つと実行され次のようなコッホ曲線が出来上がる。



4 参考文献

参考文献

- [1] 川平友規：マンデルブロー集合 —2次関数の複素力学系入門— (平成24年12月22日)
<https://www1.econ.hit-u.ac.jp/kawahira/courses/mandel.pdf>
(最終閲覧日 2023年2月28日)
- [2] 奥村晴彦：Mandelbrot 集合
<https://okumuralab.org/~okumura/python/mandelbrot.html>
(最終閲覧日 2023年2月28日)
- [3] 石村貞夫・石村園子：フラクタル数学, 東京図書株式会社 (1990年7月25日発行)
- [4] Wikipedia:Mandelbrot set (最終閲覧日 2023年2月28日)
- [5] H. ザーガン：空間充填曲線とフラクタル, シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社 (1998年12月22日発行)
- [6] 梶野直孝：フラクタル上の解析学入門 (2014年2月23日)
<https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nkajino/lectures/2013/Fractal2013/Fractal2013.pdf>
(最終閲覧日 2023年2月28日)
- [7] 佐藤和弘：マンデルブロ集合は生物である —周期・カオス・発散が生物の私たち作りのルールを決める—
[file:///Users/ev190057/Downloads/5-2%E7%B4%80%E8%A6%8107%E4%BD%90%E8%97%A4%20\(1\).pdf](file:///Users/ev190057/Downloads/5-2%E7%B4%80%E8%A6%8107%E4%BD%90%E8%97%A4%20(1).pdf)
(最終閲覧日 2023年2月28日)
- [8] 藤村雅代：実験数学のすすめ
<http://www.nara-wu.ac.jp/initiative-MPI/images/Fujimura/Fujimura-file.pdf>
(最終閲覧日 2023年2月28日)
- [9] 向後武士：新奇な複素写像のマンデルブロ集合とジュリア集合
file:///Users/ev190057/Downloads/1345_2428__39_31.pdf
(最終閲覧日 2023年2月28日)