

2021 年度 卒業研究レポート

# 感染症数理モデル ～SIR モデル～

明治大学 総合数理学部 現象数理学科  
内藤 仁人

2022 年 2 月 16 日

# 目次

1章 はじめに .....	2
2章 SIR モデル .....	3
3章 SIR モデルの数学的考察 .....	4
4章 無次元化した SIR モデル .....	10
5章 ワクチンによる感染症流行への影響 .....	13
6章 数値シミュレーション .....	14
7章 まとめ .....	17
付録 .....	18
参考文献 .....	19

# 1 章 はじめに

2019年12月ごろに中国湖北省武漢市で発生したとされている新型コロナウイルス感染症は、2022年2月16日現在も世界中で猛威を振るっており、日本においても例外ではなく、累計感染者数は約405万人、死亡者数は約2万人(厚生労働省[4])と甚大な被害をもたらしている。

感染症というものが我々にとって身近な存在となってしまっていることは、残念ながら事実であろう。

本レポートは、感染症がどのように拡大していくかを数式によって記述するSIRモデルについて、ゼミを通して学んだことをまとめたものである。

## 2章 SIR モデル

(この章の内容は、Kermack-McKendrick(1927)の内容を詳しく説明した、佐藤[1]によるものである。)

ある地域に住む人々の集団の中ごく少数の感染者が発生したとき、集団に対してどのような影響を及ぼすかについて考えよう。

まず、その集団は他の地域との接触は全くなく、その地域の中でのみ接触があると仮定する。また、住民の出生や自然死、他の地域への移住等はないものとする。すなわち、この集団の総人口は常に一定である。

次に、この集団を、感受性者(感染する可能性がある者)、感染者、除去者の3つのグループに分ける。

除去者とは、感染から回復し二度と感染しない者や、感染によって死亡した者などをいう。

そして、感受性者は感染者との接触によってのみ感染し、感染すると直ちに感染者となること、感染者は一定の割合で除去者となることを仮定する。

これらの仮定によって、次の微分方程式が得られる。これは SIR モデルと呼ばれる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \end{array} \right.$$

$S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$  は、時刻  $t$  における感受性者数、感染者数、除去者数を表し、 $\beta$  は感染率と呼ばれる正の定数、 $\gamma$  を除去率と呼ばれる正の定数を表す。

また、 $\gamma^{-1}$  は感染性期間(他者に二次感染を起こしうる期間)を表し、例えば、単位時間を1日、 $\gamma = 0.1$  とすれば、 $\gamma^{-1} = 10(\text{日})$  となる。

### 3章 SIRモデルの数学的考察

(この章の内容は、佐藤[1], 稲葉[2]を参考に行っている。)

この章では、SIRモデルについて、数学的に考察していこう。

連立微分方程式の初期値問題

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \end{array} \right. \quad \dots (1)$$

$$S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = r \quad (S_0, I_0 > 0, r \geq 0) \quad \dots (2)$$

について考える。

まず、以下のことが示せる。

**定理 1** : ある定数  $N$  が存在し、任意の  $t \geq 0$  で  $S(t) + I(t) + R(t) = N$ .

証明: 
$$\frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) + \gamma I(t) = 0.$$

よって、 $S(t) + I(t) + R(t)$  は定数関数。■

(この定理の内容は、集団の総人口は常に一定であるという仮定と一致している。)

次に、 $S(t), I(t), R(t)$  の性質を調べる。

(1) の第 1 式、第 2 式は  $R(t)$  を含まないので、 $S(t), I(t)$  については、

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \end{array} \right. \quad \dots (3)$$

のみを考えれば良い。

まず、(3)の平衡点を求めよう。

**定理 2** : (3)の平衡点は、 $(S, I) = (k, 0)$ . ( $k$ は任意の実数)

証明 :  $\frac{dS}{dt} = -\beta SI = 0$ ,  $\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I = 0$  を解くことで導かれる。

$$\rho = \frac{\gamma}{\beta} \quad \dots (4) \quad \text{とおくと、} \quad \frac{dI}{dt} = \left(-1 + \frac{\rho}{S}\right) \frac{dS}{dt} \quad \text{より、}$$

両辺を  $t$  について、 $0$  から  $t$  まで積分すると、

$$\int_0^t \frac{dI}{dt} dt = \int_0^t \left(-1 + \frac{\rho}{S}\right) \frac{dS}{dt} dt.$$

ゆえに、

$$I(t) = I_0 + S_0 - S(t) + \rho \cdot \log \frac{S(t)}{S_0} \quad \dots (5)$$

という関係式が得られ、 $I$  を  $S$  の関数とみなすと、

$$I(S) = I_0 + S_0 - S + \rho \cdot \log \frac{S}{S_0}$$

が求められる。

$I(S)$  を調べよう。

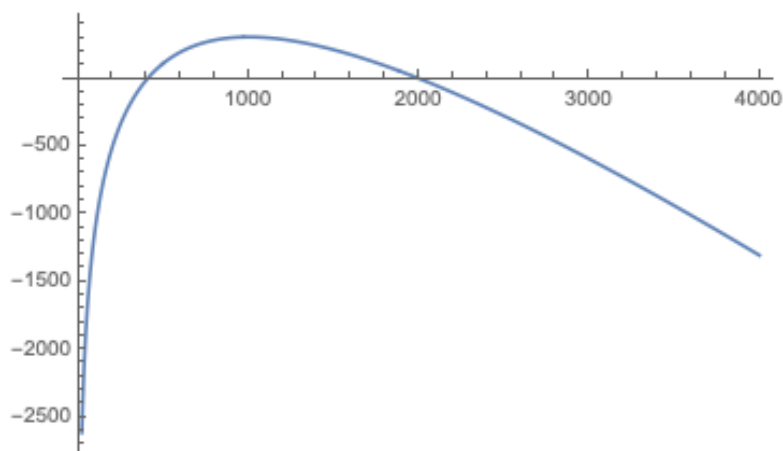
$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\rho}{S} \quad \text{より、}$$

$0 < S < \rho$  のとき、 $I(S)$  は単調増加、 $\rho < S$  のとき、単調減少。

また、 $\frac{d^2I}{dS^2} = -\frac{\rho}{S^2} < 0$  より上に凸である。

$S \rightarrow +0$  や  $S \rightarrow \infty$  のとき、 $I(S) \rightarrow -\infty$  であるから、 $I(S)$  は以下のような形になる。

図 1 :  $I(S)$  のグラフ ( $\rho = 1000, S_0 = 2000, I_0 = 1$ )



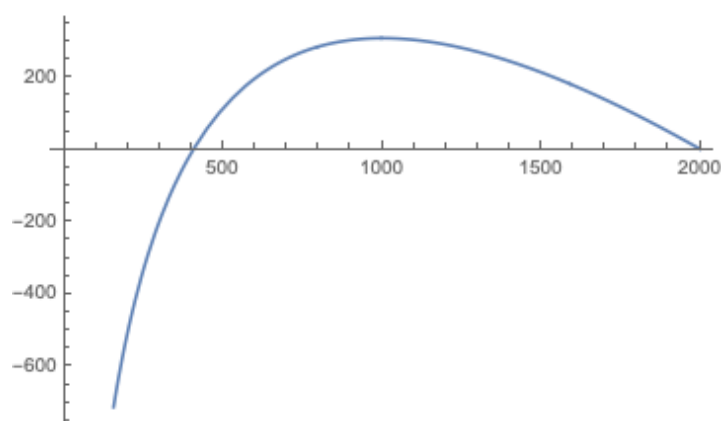
このグラフでは、 $S$  の定義域が  $0 < S < \infty$  となっているが、 $S_0 < S$  の場合は考えなくて良い。

その訳は、 $S_0, I_0 > 0$  より、 $\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) < 0$ .

すなわち、 $S(t)$  が常に単調減少だからである。

したがって、 $I(S)$  から、ある初期時点  $(S_0, I_0)$  から出発する点  $(S(t), I(t))$  は右から左に動いていくことがわかる。

図 2 :  $(S(t), I(t))$  の解軌道の予想 ( $\rho = 1000, S_0 = 2000, I_0 = 1$ )



しかし、図 2 も実際のものとは少し異なる。

なぜなら、以下の 2 つの定理が成り立つからである。

**定理 3** :  $S_0 > 0, I_0 > 0$  ならば、任意の  $t \geq 0$  に対して  $S(t), I(t) > 0$ .

証明 : 点  $(S_0(> 0), I_0(> 0))$  から出発する (3) の軌道が、第一象限の外にでていくと仮定すると、

$S(t), I(t)$  の連続性より、少なくとも一度は  $S$  軸と交わる。

すなわち、ある  $t_0 (> 0), \tau (> 0)$  が存在し、 $S(t_0) = \tau, I(t_0) = 0$ .

(3) の平衡点は、 $(S, I) = (k, 0)$  ( $k$  は任意) であるから、

関数  $S_1(t) \equiv \tau, I_1(t) \equiv 0$  は (3) の解であり、 $S_1(t_0) = \tau, I_1(t_0) = 0$  を満たすので、

解の一意性より、 $S(t) = S_1(t) \equiv \tau, I(t) = I_1(t) \equiv 0$  となり、

$I_0 > 0$  と矛盾する。■

**定理 4** :  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ , また、ある  $s (0 \leq s < \rho)$  が存在し、 $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = s$ .

証明 : 定理 3 より、 $I(t) > 0$ .

よって、 $0 < S(t) < \rho$  のとき、

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) = \beta I(t)(S(t) - \rho) < 0.$$

ゆえに、 $0 < S(t) < \rho$  の間では、 $I(t)$  は単調減少。

一方、 $I(t) > 0$  であるから、 $I(t)$  は下に有界。

また、 $S(t)$  も単調減少で下に有界であるから、

ある  $s (0 \leq s < \rho), i (\geq 0)$  が存在し、 $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = s, \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = i$ .

$h = 1$  とする。

よって、 $\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t+h) - S(t)) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} (I(t+h) - I(t)) = 0$ .

また、平均値の定理から、

$$S(t+h) - S(t) = h \cdot S'(\tau) = -\beta S(\tau)I(\tau),$$

$$I(t+h) - I(t) = h \cdot I'(\varphi) = \beta S(\varphi)I(\varphi) - \gamma I(\varphi)$$

をみたく  $\tau, \varphi (t < \tau, \varphi < t+h)$  が存在する。



$t \rightarrow \infty$  のとき、 $\tau, \varphi \rightarrow \infty$  であるから、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (-\beta S(\tau)I(\tau)) = -\beta si,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\beta S(\varphi)I(\varphi) - \gamma I(\varphi)) = \beta si - \gamma i.$$

したがって、 $-\beta si = 0$ ,  $\beta si - \gamma i = 0$ .

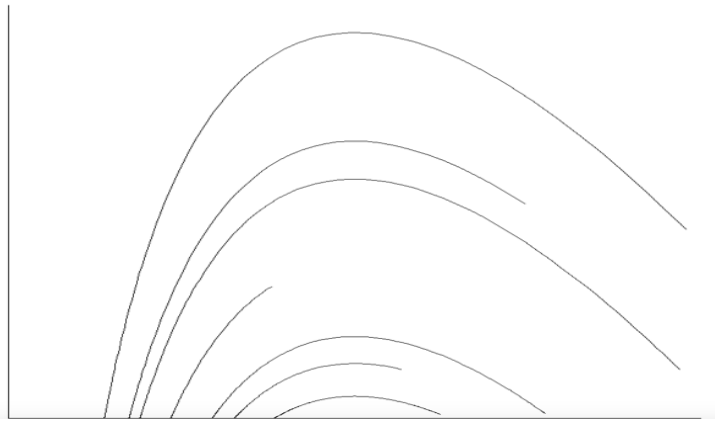
ゆえに、これを解くと、 $i = 0$ . ■

( $(s, 0)$  は (3) の平衡点であることに注意する。)

以上のことから、点  $(S(t), I(t))$  は初期値  $(S_0, I_0)$  から出発し、右から左に動き、 $t \rightarrow \infty$  のとき、ある平衡点に漸近する。

図 3 :  $(S(t), I(t))$  の解軌道

(横軸 :  $S$ , 縦軸 :  $I$ ,  $\rho = 1000$ , 初期値  $(S_0, I_0)$  はランダムにとってきた。)



$R(t)$  については、  
定理 3 より、

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) > 0.$$

すなわち、 $R(t)$  は常に単調増加。

また、定理 1 と定理 4 より、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (N - S(t) - I(t)) = N - s.$$

まとめると、以下のようになる。

$S(t), I(t), R(t)$  の性質

$S(t)$  : 常に単調減少で、ある  $s$  ( $0 \leq s < \rho$ ) が存在し、 $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = s$ .

$I(t)$  :  $S_0 > \rho$  のときは、

始めは単調増加で、その後単調減少となり、 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ .

$S_0 < \rho$  のときは、常に単調減少で、 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ .

$R(t)$  : 常に単調減少で、 $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = N - s$ .

## 4章 無次元化した SIR モデル

次に無次元化した SIR モデルについて考えよう。

$$S'(t) := \frac{S(t)}{N}, \quad I'(t) := \frac{I(t)}{N}, \quad R'(t) := \frac{R(t)}{N} \quad \text{とおくと、}$$

$$S'(t) + I'(t) + R'(t) = \frac{S(t)}{N} + \frac{I(t)}{N} + \frac{R(t)}{N} = 1.$$

$S(t) = NS'(t)$ ,  $I(t) = NI'(t)$ ,  $R(t) = NR'(t)$  を (1) に代入すると、

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dNS'(t)}{dt} = -\beta N^2 S'(t) I'(t) \\ \frac{dNI'(t)}{dt} = \beta N^2 S'(t) I'(t) - \gamma NI'(t) \\ \frac{dNR'(t)}{dt} = \gamma NI'(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dS'(t)}{dt} = -\beta NS'(t) I'(t) \\ \frac{dI'(t)}{dt} = \beta NS'(t) I'(t) - \gamma I'(t) \\ \frac{dR'(t)}{dt} = \gamma I'(t) \end{cases}$$

と変形でき、ここで新たに  $\beta' := N\beta$  とおくと、

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dS'(t)}{dt} = -\beta' S'(t) I'(t) \\ \frac{dI'(t)}{dt} = \beta' S'(t) I'(t) - \gamma I'(t) \\ \frac{dR'(t)}{dt} = \gamma I'(t) \end{cases}$$

さらに、 $t' := \gamma t$  とおくと、 $\frac{dt'}{dt} = \gamma$  より、

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dS'(t)}{dt'} = \frac{dS'(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = -\frac{\beta'}{\gamma} S'(t) I'(t) \\ \frac{dI'(t)}{dt'} = \frac{dI'(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{\beta'}{\gamma} S'(t) I'(t) - I'(t) \\ \frac{dR'(t)}{dt'} = \frac{dR'(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = I'(t) \end{array} \right.$$

$$R_0 := \frac{\beta'}{\gamma} = \frac{N\beta}{\gamma} \dots (6) \text{ とおくと、}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dS'(t)}{dt'} = -R_0 S'(t) I'(t) \\ \frac{dI'(t)}{dt'} = R_0 S'(t) I'(t) - I'(t) \\ \frac{dR'(t)}{dt'} = I'(t) \end{array} \right.$$

最後に、簡単のため、 $S', I', R', t'$  を新たに  $S, I, R, t$  として表すと、

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = -R_0 S(t) I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = R_0 S(t) I(t) - I(t) \quad \dots (7) \\ \frac{dR(t)}{dt} = I(t) \end{array} \right.$$

新たに定義した  $S(t), I(t), R(t)$  は、時刻  $t$  の総人口に対する感受性者、感染者、除去者の割合、 $R_0$  は **基本再生産数** と呼ばれる正の定数であり、無次元数である。

前章と同様の議論から、(7)における  $\rho$  は、 $\frac{1}{R_0}$  であることがわかる。

ゆえに、以下の定理が成り立つ。

**定理 5** : 初期値を、

$$S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = r \quad (S_0, I_0 > 0, r \geq 0, S_0 + I_0 + r = 1)$$

とする。このとき、

$R_0 < \frac{1}{S_0}$  ならば、 $I(t)$ は常に単調減少で、 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ .

$\frac{1}{S_0} < R_0$  ならば、

始めは単調増加で、その後単調減少となり、 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ .

通常、感染症が流行する初期時点においては、感染者はごく少数で、免疫を持つ者はおらず、集団のほぼ全員が感受性者であると考えられるから、(7)における初期値は、 $S_0 \approx 1$ ,  $I_0 \approx 0$ ,  $R_0 = 0$  として考えるのが普通である。

よって、近似的ではあるが、 $R_0$  が 1 より大きい小さいかで  $I(t)$  が決まる、すなわち、 $R_0$  は感染症の流行の有無を決める一つの指標となることがわかる。

## 5章 ワクチンによる感染症流行への影響

(この章の内容は、西浦[3]を参考にしている。)

前章では、免疫を持つ者はおらず、集団のほぼ全員が感受性者であると仮定した。

しかし、その感染症のワクチンが前もって開発されており、予防接種によって免疫を獲得している者が一定数いる場合などについてはどうであろうか。

この章では、 $R(0) > 0$  の場合について考えよう。

このとき、次の定理が言える。

**定理 6** : 初期値を、

$$S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = r \quad (S_0, I_0, r > 0, S_0 + I_0 + r = 1)$$

とする。このとき、

$$1 - I_0 - \frac{1}{R_0} < r \text{ ならば、} I(t) \text{ は常に単調減少。}$$

証明 :  $S_0 < \frac{1}{R_0}$  ならば、 $I(t)$  は常に単調減少であることより明らか。

$I_0 \approx 0$  として考えれば、上の定理は、 $1 - I_0 - \frac{1}{R_0} \approx 1 - \frac{1}{R_0}$  とみなすことができる。

ゆえに、 $r > 1 - \frac{1}{R_0}$  のとき、 $R_0 > 1$  であっても  $I(t)$  は常に単調減少する、すなわち、感染症の流行が起こらない、ということがわかる。

例えば、 $R_0 = 2.5$  としたとき、 $1 - \frac{1}{R_0} = 0.6$  であるから、ワクチン摂取等で、始めから除去者が6割を超えていると、感染者は増加せず、時間が経つにつれ減少していく。

## 6章 数値シミュレーション

実は、SIRモデルは解析的に解くことができない。

しかし、コンピュータを用いることで、この解を近似的に求めることができる。

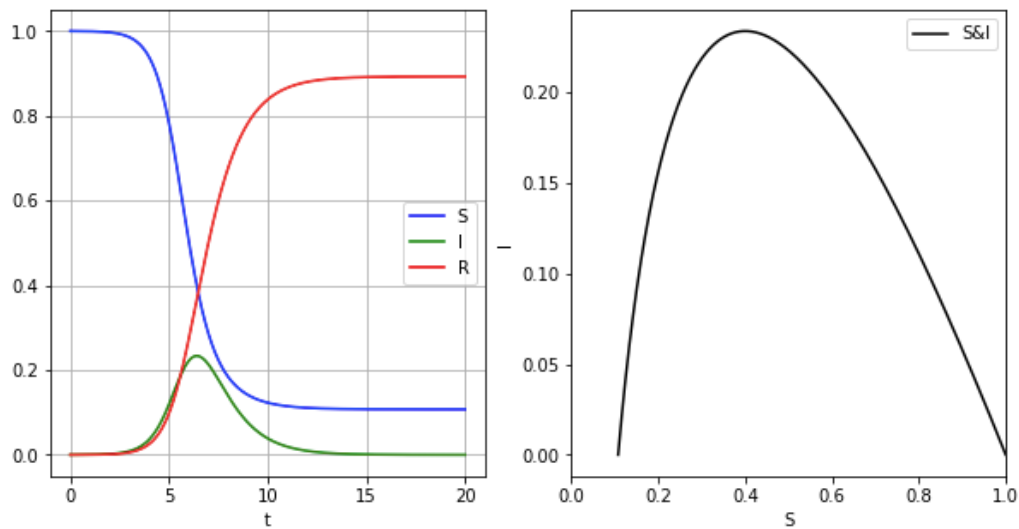
それが数値シミュレーションという手法である。

ここでは例として、

$R_0 = 2.5, r = 0$  の場合、 $R_0 = 0.6, r = 0$  の場合、 $R_0 = 2.5, r = 0.65$  の場合の3つの  $S(t), I(t), R(t)$  のグラフと SI 平面での解軌道を紹介する。

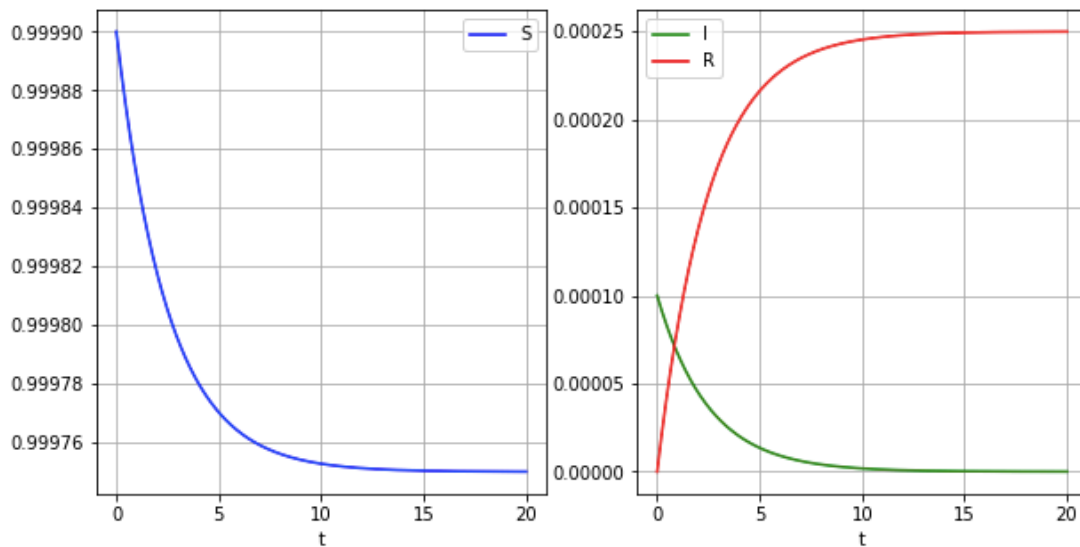
これらを見れば、前章までで示したことと一致することがわかるだろう。

例1:  $R_0 = 2.5, r = 0$  の場合

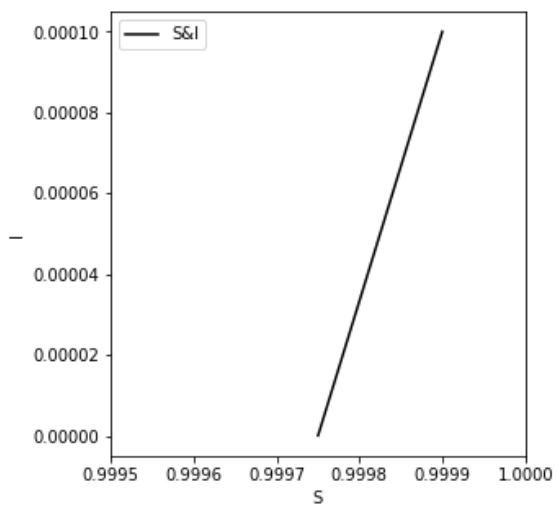


$R_0 = 2.5 \quad S(0) = 0.9999 \quad I(0) = 0.0001 \quad R(0) = 0$

例 2 :  $R_0 = 0.6, r = 0$  の場合



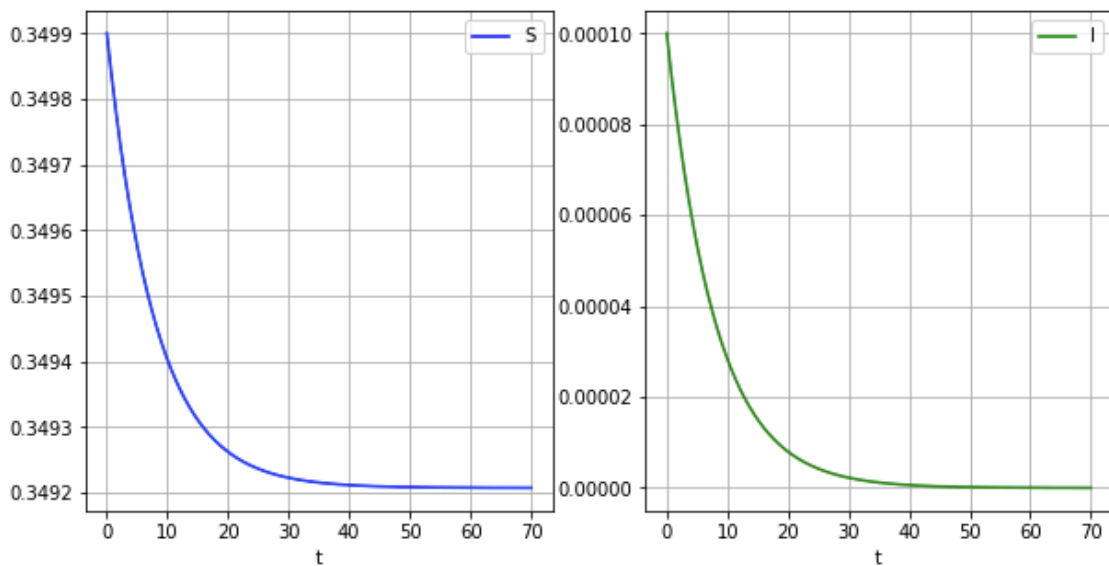
$R_0 = 0.6 \quad S(0) = 0.9999 \quad I(0) = 0.0001 \quad R(0) = 0$



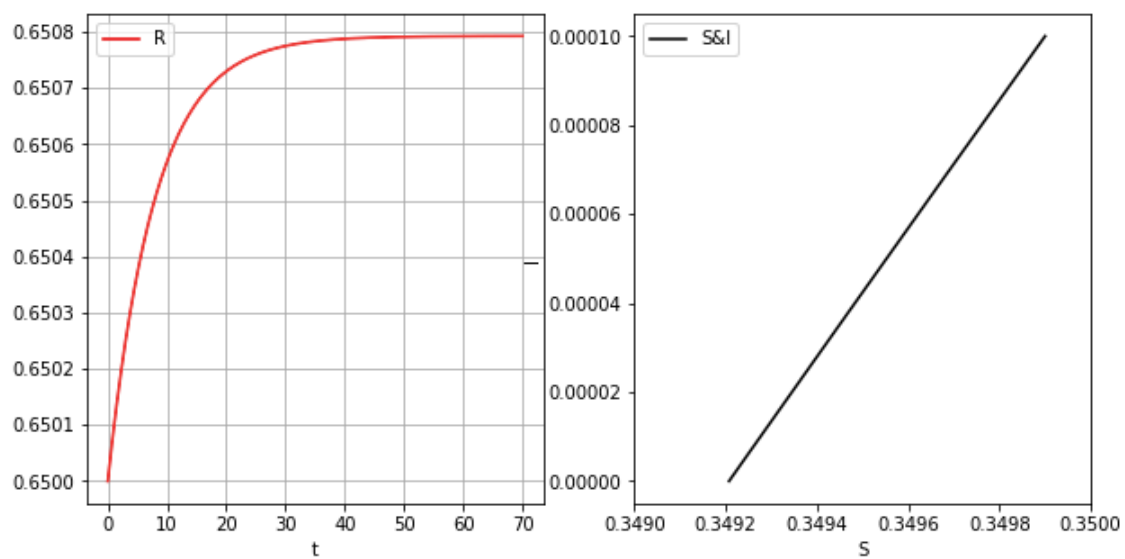
$R_0 = 0.6 \quad S(0) = 0.9999 \quad I(0) = 0.0001 \quad R(0) = 0$



例 3 :  $R_0 = 2.5$ ,  $r = 0.65$  の場合



$R_0 = 2.5$   $S(0) = 0.3499$   $I(0) = 0.0001$   $R(0) = 0.65$



$R_0 = 2.5$   $S(0) = 0.3499$   $I(0) = 0.0001$   $R(0) = 0.65$

## 7章 まとめ

本卒業研究レポートでは、SIRモデルの解の概形の数学的な考察と無次元化によって、基本再生産数  $R_0$  が感染症の流行を決める指標の一つとなること、ワクチンが流行にどのような変化をもたらすのかを示し、最後に数値シミュレーションを用いて考察した解の概形と一致するかどうかを見てきた。

もちろん、現実の感染症の流行には様々な要因があり、数理モデルで正確に記述することは不可能に近い、しかし、このように現実にかかる現象を数理モデルで表すことで、気づけていなかったものが見えてくるのではないかと、現象数理学科での勉強や本研究などを通してより一層感じるようになった。

また、今回は取り上げなかったが、SIRモデル以外にも、潜伏期間を考慮するSEIRモデルや、免疫を獲得できないSISモデルなども存在し、これらについても今後研究を続けていきたいと思う。

## 付録 $S(t), I(t), R(t)$ のグラフと SI 平面での解軌道 を描くプログラム

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

# 微分方程式の定義
def sir(x, t, R0):
    return [-R0*x[0]*x[1], R0*x[0]*x[1]-x[1], x[1]]

#R0と初期値の定義
R0=2.5
I0=0.0001
r=0.0
x0=[1.0-I0-r,I0,r]

#何等分するか
n=3000

#時刻tの範囲
t=np.linspace(0.0, 20.0, n+1)

x=odeint(sir, x0, t, args=(R0,))
plt.figure(figsize=(10,5))

#S,I,Rのグラフを描く
plt.subplot(121)
plt.plot(t,x[:,0], 'b', label='S')
plt.plot(t,x[:,1], 'g', label='I')
plt.plot(t,x[:,2], 'r', label='R')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('t')
plt.grid()

#SI平面での解軌道を描く
plt.subplot(122)
plt.xlim(0.0,1.0)
plt.plot(x[:,0],x[:,1], 'k', label='S&I')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('S')
plt.ylabel('I')
plt.show()

#R0と初期値を出力
print('R0 =',R0, ' S(0) =',1.0-I0-r, ' I(0) =',I0, ' R(0) =',r)
```

## 参考文献

- [1] 佐藤總夫「自然の数理と社会の数理 II」, 日本評論社, 1987 年
- [2] 稲葉寿編著「感染症の数理モデル」(増補版), 培風館, 2020 年
- [3] 西浦博 「感染症疫学のためのデータ分析入門」, 金芳堂, 2021 年
- [4] 厚生労働省「国内の発生状況」(閲覧日: 2022 年 2 月 16 日)  
(<https://www.mhlw.go.jp/stf/covid-19/kokunainohasseijoukyou.html>)