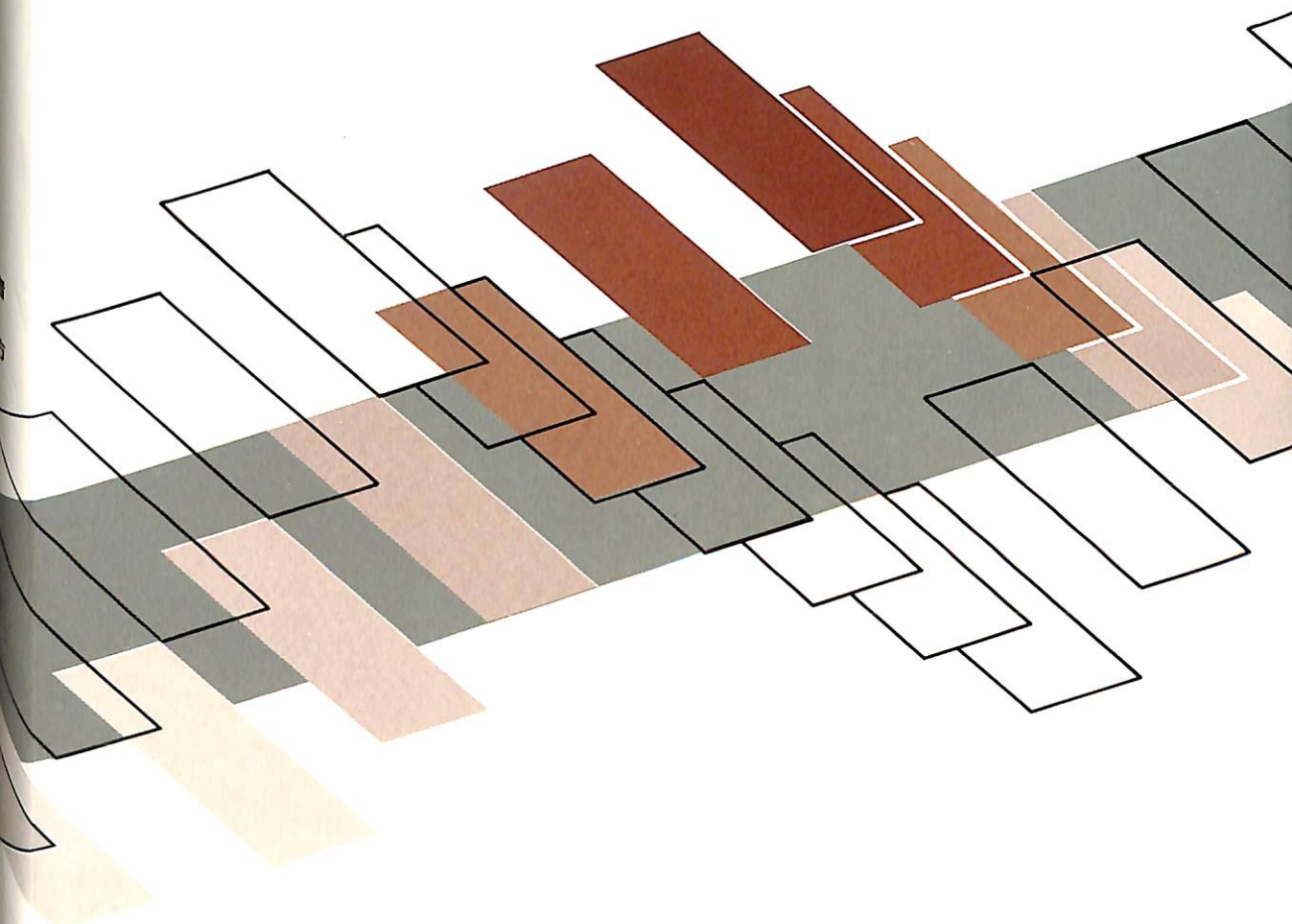


偏微分方程式

科学者・技術者のための使い方と解き方

スタンリー・ファローウ 著

伊理正夫・伊理由美 訳



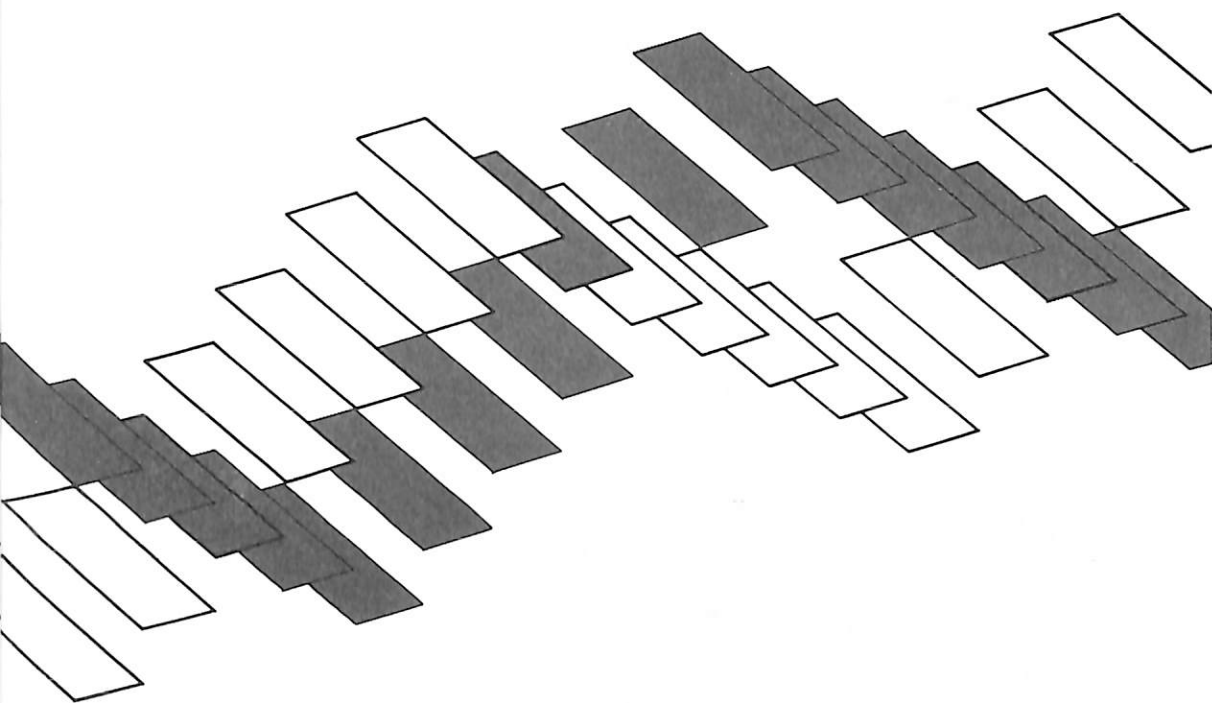
朝倉書店

偏微分方程式

科学者・技術者のための使い方と解き方

スタンリー・ファールウ 著

伊理正夫・伊理由美 訳



朝倉書店

*PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
for Scientists and Engineers*

Stanley J. Farlow

Copyright © 1996, by Dover Publications, Inc.
All Rights Reserved

The 1st edition was published in 1982,
by John Wiley & Sons, Inc.

Published in Japan by Asakura Publishing Co., Ltd.

まえがき

ここ数年の間に、大学の学部で偏微分方程式を学ぶ学部学生の数が目に見えて増えてきている。しかも、そのような学生の多くが数学以外の分野の学生であって、彼らの分野においては数学的厳密さより直観の方が重要視されているのである。本書を書くに当たり、私は直観的な考え方を刺激するようにしながら、かつ同時に、数学的な厳密さをあまり失わないよう努めた。数学的に高水準な ϵ - δ 流の書き方でこの主題を扱うというのが、考えうる一方の極端であるが、このようにすれば、一般には、多くの学部学生にとって何がどうなっているのかわからないということになる。その反対の極端な書き方は、微妙な点を一切捨て去ってしまうことであるが、そうすると学生がわからないだけでなく先生まで何の話をしているのかわからなくなってしまうであろう。私は、この二つの極端な書き方の中間の道をうまく選んで、数学的な考え方を説明して行こうと努めた。

本書は、過去5年間に私が準備してきた講義のノートに基づいてそれをさらに発展させたものである。本書は次の点で普通の教科書とは異なる形をとっている：すなわち、章ごとに区切って話を進めるという普通の形をとらないで、それぞれがほとんど独立した47個の“課”を並べるという形をとったことである。

変数分離と積分変換とがここで論じられる最も重要な解析的な手段である。モンテ・カルロ法、変分法、制御理論、ポテンシャル論、積分方程式、というようなあまり標準的でない話題もいくつか論じることにした。それは、たいいていの学生が将来いずれは出会うであろうと思ったからである。ここでこれらの話題を学ばなければ、将来彼らはきちんとそれらの話題を学ぶ機会を恐らくもたないであろう。

本書は、低学年でも高学年でも1学期あるいは2学期のコースの教科書とし

て使用することができる。本書の予備知識としては、微積分学と常微分方程式の知識しか仮定していない。たいていの課は、1 課当たり 1～2 日かかるであろうから、標準的な 1 学期用のカリキュラムの一例としては、課 1～13, 15～17, 19～20, 22～23, 25～27, 30～32, 37～39 を選んで教えるのもよからう。2 学期かければ、問題を解くのに十分な時間をかけながら 47 課すべてを済ませることも難しくない。

本書を書くよう勧誘して下さった Wiley の編集部の方々、本書の査読をいろいろと助言を与えて下さった Chris Rorres 教授と M. Kursheed Ali 教授に謝意を表したい。本書の改良に役立つ御助言を本書を使った学生や先生から頂ければ大変有難いと存じています。Dorothy, Susan, Alexander, Daisy Farlow にも感謝します。

Stanley J. Farlow

訳者まえがき

弾性体・流体の力学，熱伝導の理論，反応・拡散の理論，電磁気学，等々，偏微分方程式で適切に記述される物理現象は多い——見方によれば物理現象すべてが偏微分方程式によって支配されているともいえる。したがって，工学においても偏微分方程式の知識は重要なものとされて来た。伝統的な数理物理学，工業数学は，一言でいえば，“応用偏微分方程式論”であった。第二次大戦後，新しい応用数学が興隆し，工学・技術の世界では偏微分方程式は“重要な数学分野の一つ”になったとはいえ，計算機の進歩によって大規模な計算が可能になって現実的な問題に対する偏微分方程式を実際に解くことができるようになったため，その有用性は一層大きく認められている。

しかし正直に言って，偏微分方程式の厳密な数学的理論はかなり難しい——あるいは関数解析学の立場からどんどん難しいものになされている。応用家にとって，役に立つ偏微分方程式の理論の全貌を学ぶことは，学問の一般的な進歩にもかかわらず——あるいはそのために——ますます困難になって来ているといえないでもない。では一体，応用の立場から本当に偏微分方程式のことを勉強したい人達はどうしたらよいのであろうか；教えなければならない人達はどうしたらよいのであろうか。やはり，ある程度厳密性は犠牲にして物理的直観をまじえつつ，広い範囲をカバーした話題について教え，かつ，学ぶのでなければなるまい。

本書はそのような授業経験を基にして著された書物であり，著者のまえがきにもあるように，教室における授業の雰囲気がよく保たれていて，読みやすく書かれている。各章ばらばらに読んでも小纏まりしているところなどは心憎

い。かなり思い切って乱暴な取り扱いをしてある場所もあるが、それも“落ちこぼれを減らす”効果絶大であると期待される。

やはり、このような書はアメリカでないとは作れないとの感が深い。日本にもこのような分野の専門家は多いし、“書く気になれば書ける”人も少なくないであろう。しかし、実際に本を書こうとすると、読者対象のことよりも仲間うちの専門家のことが頭に浮かび、つい細部の厳密性に気を取られて“森を見ず”になりがちで、思い切ってこのような本を書くことができないのではなかろうか。

そういうわけで、本書は表題の通り、物理や工学への応用の立場から偏微分方程式を初めて学ぼうとする者にとっては絶好の書であろう。教える者に対しても多くの指針を与える書であろう。さらに、数学そのものを専門にしようとする者にも、偏微分方程式に対してこんな見方もあるのかという新しい発見を与えるかもしれない。

文章表現の厳密性については原本と調子の合った訳文を作るように努めたつもりではあるが、ときどき“悪い癖”が出て、原文より訳文が“数学的”になっているのではないかと恐れる。

授業の現場的雰囲気を反映させるためか、原著の図や数表(式)にはかなり不正確なものがあったが、それをより正確なものに置き変えても訳書の読みやすさを損うことにはならないと信じて、かなり多くの図を書き直し、数表を計算し直し、式を訂正した。

本書はしばらく入手困難な状況にあったが、このたび誤植訂正も加えて朝倉書店より刊行されることになった。さらに多くの学生諸君に活用していただければ幸いである。

1996 年 11 月

伊 理 正 夫
伊 理 山 美

目 次

第1部 入門 1

第1課 偏微分方程式入門 3

第2部 拡散型の問題 11

第2課 拡散型の問題（放物型方程式） 13

第3課 拡散型問題のいろいろな境界条件 21

第4課 熱伝導方程式の導出 30

第5課 変数分離 36

第6課 非同次境界条件を同次境界条件に変換すること 46

第7課 もっと複雑な問題を変数分離で解くこと 52

第8課 難しい方程式を簡単な方程式に変えること 61

第9課 非同次偏微分方程式の解法（固有関数展開） 66

第10課 積分変換（正弦変換と余弦変換） 74

第11課 Fourier 級数と Fourier 変換 84

第12課 Fourier 変換およびその偏微分方程式への応用 92

第13課 Laplace 変換 100

第14課 Duhamel の原理 110

第15課 拡散問題における対流項 u_x

第3部 双曲型の問題 125

第16課 1次元波動方程式（双曲型方程式） 127

第17課 波動方程式の D'Alembert 解 133

第18課 D'Alembert 解（続） 141

第19課 波動方程式に関連した境界条件 150

第20課 有限な弦の振動（定常波） 157

第21課 梁の振動（4階の偏微分方程式） 165

第 22 課	問題の無次元化	172
第 23 課	偏微分方程式の分類（双曲型方程式の標準形）	179
第 24 課	2 次元と 3 次元の波動方程式（自由空間）	188
第 25 課	有限 Fourier 変換（正弦変換と余弦変換）	196
第 26 課	重ね合わせ（線形システムの屋台骨）	202
第 27 課	1 階の方程式（特性曲線法）	209
第 28 課	非線形 1 階方程式（保存方程式）	217
第 29 課	連立偏微分方程式	227
第 30 課	太鼓の膜の振動（極座標の波動方程式）	235
第 4 部	楕円型の問題	247
第 31 課	ラプラシアン（直観的記述）	249
第 32 課	境界値問題の一般的性質	258
第 33 課	円に対する内部 Dirichlet 問題	266
第 34 課	円環領域における Dirichlet 問題	274
第 35 課	球座標に関する Laplace 方程式（球面調和関数）	284
第 36 課	非同次の Dirichlet 問題（Green 関数）	294
第 5 部	数値解法と近似解法	305
第 37 課	数値解（楕円型の問題）	307
第 38 課	陽的差分法	315
第 39 課	陰的差分法（Crank-Nicolson 法）	323
第 40 課	解析解と数値解	329
第 41 課	偏微分方程式の分類（放物型の方程式と楕円型の方程式）	335
第 42 課	モンテ・カルロ法（入門）	345
第 43 課	偏微分方程式のモンテ・カルロ解	352
第 44 課	変分法（Euler-Lagrange 方程式）	359
第 45 課	偏微分方程式を解くための変分法（Ritz の方法）	368
第 46 課	偏微分方程式を解くための摂動法	376
第 47 課	偏微分方程式の等角写像による解	385
付録	積分変換表	397
索引		408

第 1 部

入 門

第1課 偏微分方程式入門

目的： 偏微分方程式とは何か、偏微分方程式はなぜ役に立つのか、偏微分方程式はどうやって解くのかを示す。また、偏微分方程式の種類や型による分類についてもざっと述べる。後の課で詳しく学ぶいろいろな考え方についても概観する。

流体力学，電気，磁気，力学，光学，熱流，いずれの領域においても，たいの物理現象は一般に偏微分方程式で記述することができる。実際，たいの物理数学の問題は偏微分方程式である。考えている偏微分方程式を単純化して常微分方程式に帰着できることがあることも事実であるが，そのような物理系も完全に記述しようとするれば偏微分方程式の領域に属する問題となる。

偏微分方程式とは何か

偏微分方程式とは偏導関数を含む方程式のことである。未知関数が1個の独立変数だけによる常微分方程式とは異なり，偏微分方程式では未知関数は複数の独立変数によっている（たとえば温度 $u(x, t)$ は位置 x と時間 t によるというような具合に）。

よく知られた偏微分方程式の例をいくつか挙げてみよう。記号を簡略化するために以下のような記号をこれから使う。

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \dots\dots$$

よく知られた偏微分方程式の例

$$u_t = u_{xx} \quad (1 \text{ 次元熱伝導方程式})$$

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} \quad (2 \text{ 次元熱伝導方程式})$$

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad (\text{極座標表示の Laplace (ラプラス) 方程式})$$

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \quad (3 \text{次元波動方程式})$$

$$u_{tt} = u_{xx} + \alpha u_t + \beta u \quad (\text{電信方程式})$$

上の例に対する注意

未知関数 u は常に 2 個以上の変数の関数である。微分される方の変数 u を従属変数と呼び、微分する方の変数を独立変数と呼ぶ。たとえば、方程式

$$u_t = u_{xx}$$

においては、従属変数 $u(x, t)$ が二つの独立変数 x と t の関数であり、方程式

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

では $u(r, \theta, t)$ は三つの独立変数 r, θ, t の関数である。

偏微分方程式はなぜ役に立つのか

物理学におけるたいていの自然法則、たとえば、Maxwell (マックスウェル) の方程式、Newton (ニュートン) の冷却法則、Navier-Stokes (ナヴィエ・ストークス) の方程式、Newton の運動方程式、量子力学の Schrödinger (シュレーディンガー) 方程式などは偏微分方程式によって表されている (あるいはそのように表すことができる)。すなわち、これらの法則は、物理現象を空間微分と時間微分の間の関係という形で記述している。これらの方程式に導関数が現れるのは導関数が自然な概念 (速度、加速度、力、摩擦、磁束、電流のような) を表すからである。このようにして、われわれの求めたいある未知量の偏導関数に関する方程式が得られるのである。

本書の目的は読者に次の二つのことを示すことである。

1. 物理の問題をどのようにして偏微分方程式の形に定式化するか (すなわち、数学モデルの構成法)。
 2. 偏微分方程式 (初期条件、境界条件も含めて) をいかにして解くか。
- 問題の定式化の話は数課あと回しにして、まず偏微分方程式の解き方についてざっと眺めることにする。

偏微分方程式はどうやって解くのか

これはよい質問である。実際家が使える手法集がすでにある。その最も重要なのが偏微分方程式を常微分方程式に変える方法である。実際に役立つ方法10種を挙げると次の通りである。

1. 変数分離 n 変数の偏微分方程式を n 個の常微分方程式に変える方法。
2. 積分変換 n 個の独立変数の偏微分方程式を $n-1$ 変数の偏微分方程式に変える手順。したがって、2変数の偏微分方程式は常微分方程式に変えることができる。
3. 座標変換 取り扱う問題の座標を変換すること（座標軸を回転すること、など）によって、元の偏微分方程式を常微分方程式あるいはもっと取り扱いやすい別の偏微分方程式に変える方法。
4. 従属変数の変換 偏微分方程式に含まれる未知関数を、求めやすい新しい未知関数に変換する方法。
5. 数値計算 偏微分方程式を連立差分方程式に変え、計算機を使って反復法で解く方法。可能な方法がこれしかないような場合も多い。偏微分方程式を差分方程式で置き変える方法の他に、多項式関数の形の近似解（スプライン関数近似、など）を求める方法もある。
6. 摂動法 非線形問題の解法を、一連の線形問題の解法に変える方法。
7. インパルス応答法 問題の初期条件と境界条件を単純なインパルスの形に分解し、各インパルスに対する応答を求める手法（線形な問題に対してのみ有効）。これらの応答を加え合わせることで全体に応答が求められる。
8. 積分方程式 偏微分方程式を積分方程式（積分の中に未知関数が含まれる形の方程式）に変える方法。積分方程式はまたいろいろな方法で解かれる。
9. 変分法 最小化問題の形に方程式を書き直して、偏微分方程式の解を求める方法。ある式（全エネルギーを表す式であることが多い）の最小値が偏微分方程式の解になっていることが多い。
10. 固有関数展開 偏微分方程式の解を固有関数の無限和の形で求める方法。これらの固有関数は元の問題に対応するいわゆる固有値問題を解くことにより求められる。

偏微分方程式の種類

偏微分方程式はいろいろな基準によって分類される。分類が重要なのは、一般的な理論や解法はある特殊な型の方程式に対してしか適用できないのが普通だからである。基本分類基準は次の6通りである。

1. 偏微分方程式の階数 方程式中の偏導関数の最高次数を偏微分方程式の階数という。たとえば、

$$u_t = u_{xx} \quad \text{は2階}$$

$$u_t = u_x \quad \text{は1階}$$

$$u_t = uu_{xxx} + \sin x \quad \text{は3階}$$

2. 独立変数の個数 たとえば、

$$u_t = u_{xx} \quad \text{は2変数}(x \text{ と } t)$$

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \quad \text{は3変数}(r \text{ と } \theta \text{ と } t)$$

3. 線形性 偏微分方程式は線形か非線形かである。線形偏微分方程式というのは、従属変数 u とその導関数が方程式の中にすべて線形で現れる（たとえば、それらの積とか2乗とかが方程式の中に現れることはない）もののことである。より正確にいうと、2階の2変数線形偏微分方程式は次のような形をしている。

$$(1.1) \star \quad Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

ここで A, B, C, D, E, F, G は定数あるいは与えられた独立変数 x, y の関数である。たとえば、

$$u_{tt} = e^{-t}u_{xx} + \sin t \quad \text{は線形}$$

$$uu_{xx} + u_t = 0 \quad \text{は非線形}$$

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0 \quad \text{は線形}$$

$$xu_x + yu_y + u^2 = 0 \quad \text{は非線形}$$

4. 同次性 方程式 (1.1) は右辺 $G(x, y)$ があらゆる x, y に対して恒等的に0であるとき同次であるという。 $G(x, y)$ が恒等的には0でないとき方程式は非同次であるという。
5. 係数の種類 式 (1.1) の係数 A, B, C, D, E, F が定数であるとき、(1.1) は定数係数であるという（それ以外のときは変数係数であるという）。

6. 線形方程式の三つの基本型 線形偏微分方程式 (1.1) は次の三つの型のいずれかである：

- (a) 放物型
(b) 双曲型
(c) 楕円型

放物型 放物型方程式は熱流や拡散の過程を記述するもので、 $B^2 - 4AC = 0$ を満たす。

双曲型 双曲型方程式は振動や波動を記述するもので、 $B^2 - 4AC > 0$ を満たす。

楕円型 楕円型方程式は定常状態の現象を記述するもので、 $B^2 - 4AC < 0$ を満たす。

例

(a) $u_t = u_{xx}$ $B^2 - 4AC = 0$ は放物型

(b) $u_{tt} = u_{xx}$ $B^2 - 4AC = 4$ は双曲型

(c) $u_{\xi\eta} = 0$ $B^2 - 4AC = 1$ は双曲型

(d) $u_{xx} + u_{yy} = 0$ $B^2 - 4AC = -4$ は楕円型

(e) $y u_{xx} + y_{yy} = 0$ $B^2 - 4AC = -4y$ $\begin{cases} y > 0 \text{ のとき楕円型} \\ y = 0 \text{ のとき放物型} \\ y < 0 \text{ のとき双曲型} \end{cases}$

(変数係数のときは各点で状況が変わる.)

注意

1. 一般に、 $B^2 - 4AC$ は独立変数の関数である。したがって、方程式は定義域において、ある基本型から他の基本型に変わることがありうる（あまりそういうことはないが）。
2. 線形方程式の一般形 (1.1) は独立変数を x, y として書いてあるが、2変数のうちの 하나가時間、したがって変数が x と t であるような問題も多い。
3. 一般的な分類図を図 1.1 に示す。

線形性	線形				非線形		
階数	1	2	3	4	5	...	m
係数の種類 (線形方程式)	定数				変数		
同次性 (線形方程式)	同次				非同次		
変数の個数	1	2	3	4	5	...	n
基本型 (線形方程式)	双曲型		放物型			楕円型	

図 1.1 偏微分方程式の分類図

練習問題

- 次の方程式は図 1.1 のどこに分類されるか.
 - $u_t = u_{xx} + 2u_x + u$
 - $u_t = u_{xx} + e^{-t}$
 - $u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = \sin x$
 - $u_{tt} = uu_{xxxx} + e^{-t}$
- 偏微分方程式 $u_t = u_{xx}$ の解を何個見いだせるか. $u(x, t) = e^{ax+bt}$ という形をしている解を試してみよ.
- $u_1(x, y)$ と $u_2(x, y)$ がそれぞれ方程式 (1.1) を満たすとき, その和も式 (1.1) を満たすといえるか. もしそうなら, それを証明せよ.
- 偏微分方程式の中で最も解きやすいものは, 恐らく, 方程式

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0$$

であろう. この方程式を解くことができるか. (この方程式を満たすすべての関数 $u(x, y)$ を求めよ.)

- 偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$$

についてはどうか。この方程式のすべての解を求めることができるか。（どのくらいたくさんあるか。）上の偏微分方程式と常微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

とでは、解の個数がどのくらい異なるか。

参考書

1. P. W. Berg, J. L. McGregor, *Elementary Partial Differential Equations*, Holden-Day, 1966. 書き方がはっきりしていて、良い問題がいくつも挙げられている。持っていて損のない良書である。
2. R. L. Street, *Analysis and Solution of Partial Differential Equations*, Brooks/Cole, 1973. 本書で取り上げる話題も多く含んでいる良書。

第2部

拡散型の問題

第2課 拡散型の問題(放物型方程式)

目的： 熱流や拡散型の問題のモデルとして放物型偏微分方程式をどのように使うかを示すこと。いろいろな項 (u_t, u_x, u_{xx}, u など) の物理的意味を説明し、放物型方程式の例を二三挙げる。

初期値・境界値問題の考え方を一つの例に沿って導入する。放物型の問題に対する直観的な感じを読者につかんでもらうことがこの課の主な目標の一つである。

まず最初に、簡単な物理の問題の一つ取り上げて、それが数学モデル(偏微分方程式を含む)によってどのように記述できるかを示す。次に問題を複雑化して、新しい状況を記述する新しい偏微分方程式を示す。この課の偏微分方程式を導き出したり解いたりすることはここではしないで、後の課に譲ることにする。

簡単な熱流の実験

次のような簡単な実験をいくつかの段階に分けて行くと想像してみよう。

〈ステップ 1〉 まず、十分に長い(たとえば長さ $L=2\text{m}$ の)直径 2cm の棒(たとえば銅の棒)を選び、その側面(両端を除く)に絶縁体を巻きつける。内側に絶縁物を詰めた銅の管材を使ってもよい。要するに、熱は棒の端からだけ流入・流出し、側面の境界からは出入りできないようにしておく。

〈ステップ 2〉 次に、温度が十分長い時間ある温度 T_0 に保たれているような環境にこの棒を置き、この棒全体が周囲と同じ定常状態の温度になるようにする。簡単のため、周囲の温度を $T_0=10^\circ\text{C}$ とする。

〈ステップ 3〉 $t=0$ のときこの環境から棒を取り出し、棒の両端に二つの熱源をつける。その目的は、棒の端を特定の温度 T_1 および T_2 (たとえば $T_1=0^\circ\text{C}$, $T_2=50^\circ\text{C}$) に保つことである。いいかえれば、二つの自動温度調節装

置が絶えず棒の両端の温度を監視し、温度が上記の値 T_1 および T_2 と異なるとただちに強力な加熱（冷却）装置が作動して温度を調節する。図 2.1 にそのような実験装置を示す。

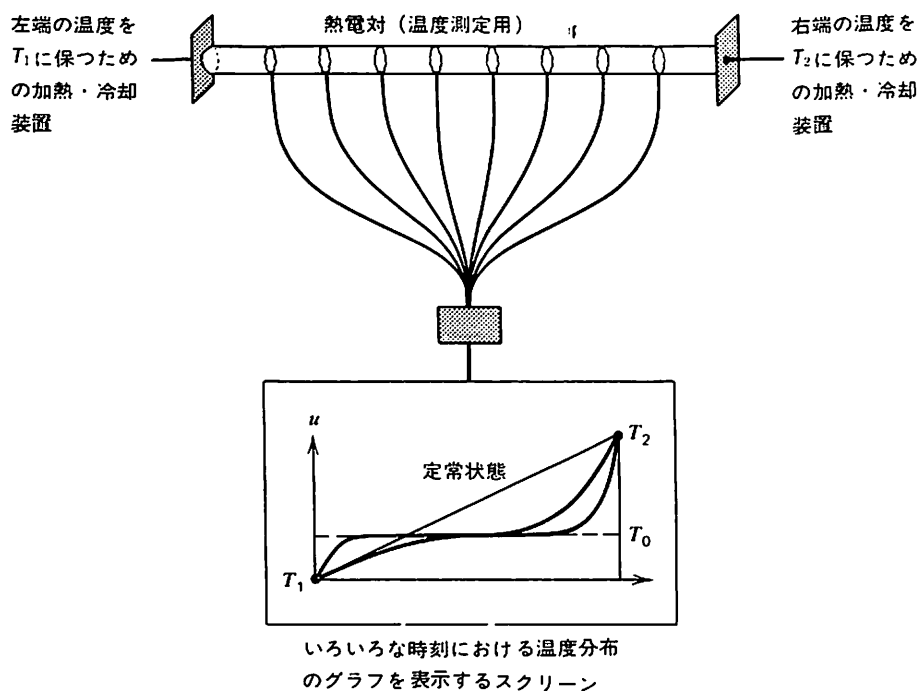


図 2.1 熱流実験の模式図

〈ステップ 4〉 棒の温度分布を適当な表示装置で監視する。（この種の実験にどのような意義があるかはまた別の問題である。このことについては後で述べる。）

これで実験についての話は終わりである。この課の主目的は、この物理の問題（およびその変形）が放物型偏微分方程式でどのように説明される（モデル化される）かを示すことである。

熱流実験の数学モデル

上の物理の問題を記述するには 3 種の式が必要である：

1. 熱流の物理現象を記述する偏微分方程式

2. この問題の境界における物理的性質を記述する境界条件
3. 実験開始時における物理的な現象を記述する初期条件

熱伝導方程式

1次元熱流の基本方程式，すなわち

(2.1)★ 偏微分方程式 $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ ($0 < x < L$, $0 < t < \infty$)

は，

u_t = 温度の時間変化率 (単位は K/s)

と

u_{xx} = 温度分布 $u(x, t)$ のへこみの度合

(ある点の温度をその近傍点の温度と比べたもの)

との間の関係をつけるものである。後の課でこの式を基本的な熱量保存の方程式から導出するが，当面この方程式自身の性質を調べてみることにする。この式は，(棒の上のある点 x のある時刻 t における) 温度 $u(x, t)$ が， u_{xx} が正であるかあるいは負であるかによって増加する ($u_t > 0$) かあるいは減少する ($u_t < 0$) かであるということを述べているに過ぎない。図 2.2 は棒に沿ったいろいろな点での温度変化の様子を図示している。

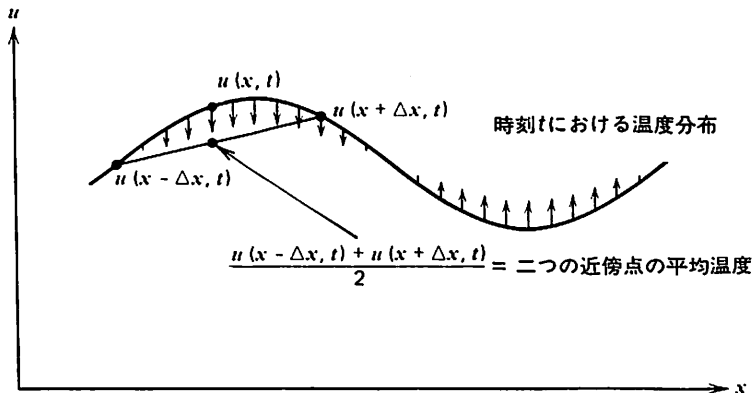


図 2.2 $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ に従う温度変化を表す矢印

どうして u_{xx} が熱流を測っていると解釈できるのかを示すために， u_{xx} を次のような差の商で近似してみよう：

$$u_{xx}(x, t) \cong \frac{1}{\Delta x^2} [u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)]$$

これは

$$u_{xx}(x, t) \cong \frac{2}{\Delta x^2} \left[\frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t)}{2} - u(x, t) \right]$$

のように書き直せるから、次のような u_{xx} の解釈が得られる。

1. 温度 $u(x, t)$ が二つの近傍点の温度の平均より小さければ, $u_{xx} > 0$ である (この場合, x へ流入する総熱流は正である)。
2. 温度 $u(x, t)$ が二つの近傍点の温度の平均に等しければ, $u_{xx} = 0$ である (この場合, x へ流入する総熱流は零である)。
3. 温度 $u(x, t)$ が二つの近傍点の温度の平均より大きければ, $u_{xx} < 0$ である (この場合, x へ流入する総熱流は負である)。

図 2.2 にはこのことが模式的に描いてある。いいかえれば, ある点 x の温度がその両側の近傍点 $x - \Delta x$ および $x + \Delta x$ の温度の平均より大きければ, x の温度は減少することになる。そして, その減少速度 u_t は正確にはこの差に比例するというわけである。比例定数 α^2 は物質に固有のものである。この定数については, この先の二三課でさらに論じることにする。

境界条件

すべての物理の問題には何らかの境界があるといつてよい。したがって, 問題を適切に記述するためには境界で何が起きているかを数学的に記述しなければならない。われわれの実験では境界条件は大変簡単である。すべての時刻 $t > 0$ において, 二つの端点 $x = 0$ および $x = L$ での温度を T_1 および T_2 にそれぞれ固定しておいたから, 単に,

$$(2.2) \star \quad \text{境界条件: } \begin{cases} u(0, t) = T_1 \\ u(L, t) = T_2 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

としておけばよい。

初期条件

すべての物理の問題は時刻のある値 ($t = 0$ と呼ぶのが普通である) から始まるはずである。したがって, この時刻において状況がどうなっているかを明確にしておかなければならない。われわれの実験では, 棒の温度がある一定の

温度 T_0 に達したときから棒の温度を監視し始めたから、

(2.3)★ 初期条件: $u(x, 0) = T_0$ ($0 \leq x \leq L$)

である。

これで、われわれの実験の数学的記述は終わった。式 (2.1), (2.2), (2.3) をまとめて書けば、初期値・境界値問題と呼ばれるものが得られる：

$$(2.4) \quad \begin{array}{ll} \text{偏微分方程式} & u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad (0 < x < L, \quad 0 < t < \infty) \\ \text{境界条件} & \begin{cases} u(0, t) = T_1 \\ u(L, t) = T_2 \end{cases} \quad (0 < t < \infty) \\ \text{初期条件} & u(x, 0) = T_0 \quad (0 \leq x \leq L) \end{array}$$

ここで面白いことは——明らかでは決していないが——問題 (2.4) を満たす関数 $u(x, t)$ が唯一つ存在するということである。そして、それが棒の温度を表すことになる。したがって、とりあえずのわれわれの目標は、(2.4) の唯一の解 $u(x, t)$ を求めることである。

この課を終える前に、この基本問題の変形について少し話をしよう。まず、熱伝導方程式 $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ の二三の変形から始めよう。

拡散型方程式 (続)

側面から温度差に比例する熱損失がある場合

方程式

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta(u - u_0)$$

は、棒に沿っての拡散 $\alpha^2 u_{xx}$ と棒の側面からの熱の流出 (あるいは流入) との両方がある場合の棒の熱流を記述している。熱損失すなわち熱の流出 ($\beta(u - u_0) > 0$) あるいは熱の流入 ($\beta(u - u_0) < 0$) は、棒の温度 $u(x, t)$ と周囲の媒質の温度 u_0 との差に比例する (比例定数が β)。 α^2 に比べて β が非常に大きいときは、棒に沿っての前後の熱の流れは側面を横切っての熱の流れに比べて小さいことになる。したがって、熱は近似式 $u_t = -\beta(u - u_0)$ に従って (各点ごとに) 側面を横切って流れ出るであろう。

化学においては u が濃度を表すような現象がある。このとき、式

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta(u - u_0)$$

は、物質濃度の変化率 u_t が (x 方向の) 拡散による項 $\alpha^2 u_{xx}$ と、化学反応により二つの濃度 u と u_0 の差に比例して物質が生成される ($\beta < 0$) あるいは崩壊する ($\beta > 0$) という事実による項とから成っていることを物語っている。

内部に熱源がある場合

非同次方程式

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t)$$

は、(棒の各点 x , 各時刻 t において) $f(x, t)$ だけの内部熱源が棒に与えられている場合に対応する。電流が流れる導線が棒の中を通っていて、その抵抗により一定の発熱 $f(x, t) = K$ があるというような場合を想像してみてもよい。

対流と拡散とがある場合 (拡散・対流方程式)

速度 v で流れる流れの中を汚染物質が運ばれていく様子を考えよう。物質の濃度 $u(x, t)$ が場所 x (流れに沿っての距離で、下流方向を正とする) と時刻 t との関数として変化することは明らかである。このとき、変化率 u_t は拡散・対流方程式

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - v u_x$$

で定められる。 $\alpha^2 u_{xx}$ の項が拡散の影響を表し、 $-v u_x$ が対流の成分、すなわち流れによって物質が運ばれることによる濃度変化を表す。汚染物質が主に拡散するのか対流で運ばれるのかは二つの係数 α^2 と v との相対的な大きさによる。煙突から立ち上る煙を見たことがあるであろう。この場合、煙の粒子は暖い空気とともに上の方に対流で運ばれ、それと同時に空気の流れの中で拡散して行く。

熱伝導方程式には以上のような変種があるが、その他、棒の境界条件をいろいろな物理的状況に応じて変更することもできる。第3課では、そのような変更について述べよう。

注意

係数 $\alpha(x)$ が定数でなく場所の関数であるような熱伝導方程式 $u_t = \alpha^2(x) u_{xx}$ は、棒の内部の拡散が x に依存する (すなわち材質が均質でない) 問題に相当する。たとえば、銅と鋼の板を隣り合わせて置き (図 2.3 参照)、銅板の左側を $u(0, t) = 0^\circ\text{C}$ に固定し、鋼板の右側を $u(L, t) = 20^\circ\text{C}$ に固定すると、熱流を表す偏微分方程式は

$$u_t = \alpha^2(x) u_{xx} \quad (0 < x < L)$$

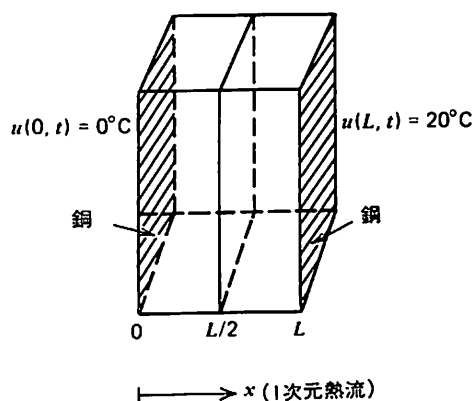


図 2.3

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_1 \text{ (銅の拡散係数)} & \left(0 < x < \frac{L}{2}\right) \\ \alpha_2 \text{ (鋼の拡散係数)} & \left(\frac{L}{2} < x < L\right) \end{cases}$$

となる.

練習問題

1. 棒の温度の初期値が

$$u(x, 0) = \sin \pi x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

で境界条件が

$$u(0, t) = 0$$

$$u(1, t) = 0$$

であるとき, その後の時刻における棒の温度 $u(x, t)$ はどうなるか.

ヒント 熱伝導方程式 $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ の物理的解釈を使え.

2. 棒がある一定の内部熱源をもつとする. すなわち, 棒の内部の熱流を表す基本方程式が

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + 1 \quad (0 < x < 1)$$

であるとする. また, 両境界での温度は $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 1$ に固定しておくとする. 棒の定常状態での温度分布はどうなるか. すなわち, 温度 $u(x, t)$ は時間に関係のない温度分布 $U(x)$ に収束するか.

ヒント $u_t = 0$ において, その温度をグラフに描いてみるとよい. また, 温度の初

期値を零として、それからの温度分布の形をいくつか描け。

3. 側面からの熱の出入りもある金属棒の温度が方程式

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u \quad (0 < x < 1)$$

に従うものとし、また、棒の両端の温度は $u(0, t) = 1$, $u(1, t) = 1$ に保たれているとする。棒の定常状態での温度を求めよ（そのグラフを描け）。この問題で、熱はどこをどのように流れているか。

4. 側面が絶縁された長さ $L=1$ の金属棒の温度の初期値が $\sin(3\pi x)$ で、左端と右端が温度 0°C と 10°C に固定されている。この問題を記述する初期値・境界値問題はどうか。

参考書

1. A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*, MacMillan, 1963. 百科事典的な情報集である。良い例題、問題がたくさん含まれている。

第3課 拡散型問題のいろいろな境界条件

目的： 熱流および拡散型の問題にはいろいろな境界条件が現れることを示し、フラックス（流束）という重要な概念を導入すること。

ここで取り扱う境界条件の主な型は次の三つである：

1. $u=g(t)$ （境界の温度が与えられている）
2. $\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = g(t)$ （周囲の媒質の温度が与えられている； n は境界の外向き法線）
3. $\frac{\partial u}{\partial n} = g(t)$ （境界をよぎる熱流が与えられている）

熱流の問題に登場するいろいろな型の境界条件について述べる時、普通に考えられるのは三つの基本的な型である。第3課ではこれら3種の境界条件を論じ、それらの境界条件に対応する実験の例を挙げる。

第1の型の境界条件（境界の温度が与えられている場合）

図3.1に示すような1次元の棒の中の熱流を考えよう。棒の両端の温度は、それぞれ、与えられた温度曲線 $g_1(t)$ および $g_2(t)$ に従うものとする。

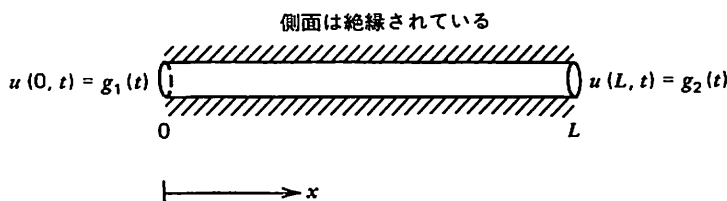


図 3.1 境界の温度が与えられている場合

前課で述べたように、棒の端を指定された温度に保つ装置は、両端にサーモスタットをつけてさらに温度を調整するための加熱（あるいは冷却）装置をつ

けることが必要である。そのような境界条件の問題はかなり普通のものである。棒の内部の温度が望ましい形になるようにするには、境界温度 $g_1(t)$ および $g_2(t)$ をどのように制御したらよいかを決めることが問題の最終目標になっている場合もある。製鉄業では、炉内の金属の温度を時間とともにある変化をさせながら、かつ、炉内での温度がなるべく一様である、すなわち炉内の点での温度勾配がなるべく小さくなるように境界温度を制御する必要がしばしばある。

似たような型の境界条件は、より高い次元の領域、たとえば2次元領域、に対しても適用可能である。たとえば、境界温度が極座標で

$$u(R, \theta, t) = \cos t \sin \theta$$

と与えられているときに（半径 R の）円板の内部の温度を求めるという興味ある問題を考えてみてもよい。図 3.2 を見よ。

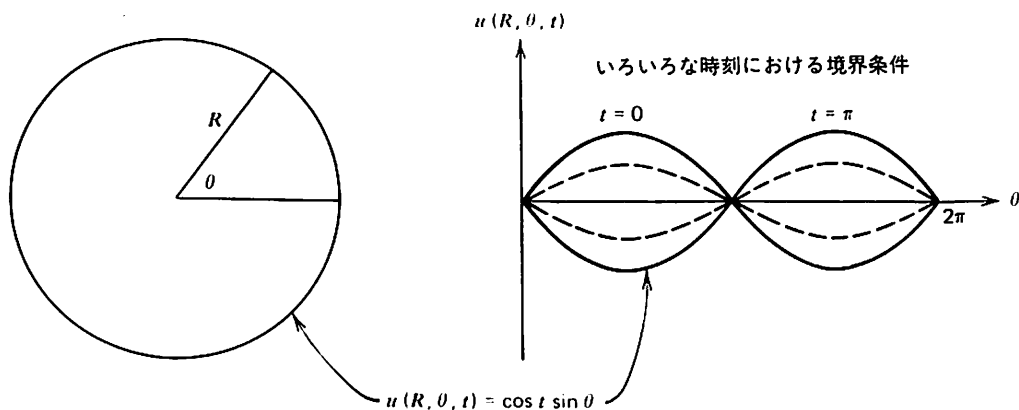


図 3.2 境界温度が振動する場合

もちろん、この実験を開始するには初期温度が与えられていなければならない。しかし、この場合、初期条件の影響はごく短時間の後に消えてしまい、円板内部の温度は境界温度にしか依存しなくなるであろう。

第2の型の境界条件（周囲の媒質の温度が与えられている場合）

ここでもまた、側面を絶縁した銅の棒を考えよう。ただし、今度は、二つの境界の温度 $g_1(t)$, $g_2(t)$ が与えられるのではなくて、温度が $g_1(t)$, $g_2(t)$ の周囲の媒質に棒の両端を接触させるだけにする。いいかえれば、棒の左端を時

間とともに変化する温度 $g_1(t)$ の液体を入れた容器の中に入れ、右端を温度 $g_2(t)$ のもう一つの液体に入れる (図 3.3).

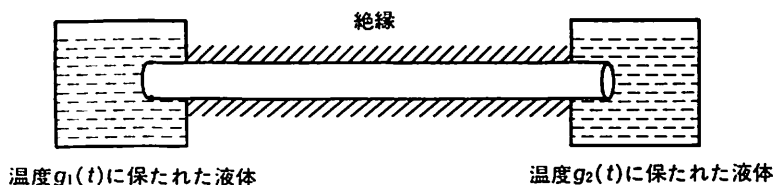


図 3.3 境界での対流冷却

このような型の境界条件では、棒の両端の温度が液体の温度 $g_1(t)$, $g_2(t)$ に等しくなるとはいえないが、棒の一つの端の温度がその液体の温度より低いときには、その温度差に比例して熱が棒に流れ込むということはわかる (Newton (ニュートン) の冷却の法則). すなわち、両端が $x=0$ および $x=L$ であるような 1 次元の棒については、Newton の冷却の法則は

$$(3.1) \quad \begin{cases} (x=0 \text{ における}) \text{ 外向き熱流束} = h[u(0, t) - g_1(t)] \\ (x=L \text{ における}) \text{ 外向き熱流束} = h[u(L, t) - g_2(t)] \end{cases}$$

である。ここで、 h は熱交換係数といい、境界面を通して温度差 1 単位あたり毎秒何ジュール (あるいはカロリー) の熱の流れがあるかを示す尺度である。また、外向きの熱流束 (フラックス) とは棒の端をよぎる毎秒の熱のジュール数である。棒の温度が周囲の媒質の温度より高いときに両端の外向きの熱流束が正となることに注意せよ。式 (3.1) と Fourier (フーリエ) の冷却の法則とを組み合わせると、われわれの境界条件に到達する。Fourier の法則は、外向きの熱流束の第 2 の表現を与えるものである (第 1 の表現が (3.1)). これら二つの表現を等しいとおくことによって、われわれの境界条件が得られる。まず Fourier の法則を述べておく。(これは実験的に証明されている.)

(3.2) ★ 物体のある断面をよぎる外向きの熱流束は、その断面における内向き法線方向の導関数に比例する。

この法則が述べていることは、「(図 3.4 の) D の境界から外向きの方向に温度が急激に増加するなら熱は周囲の媒質から領域 D の中へ流れる」ということである。

われわれの 1 次元の問題では、Fourier の法則は次のような形になる：

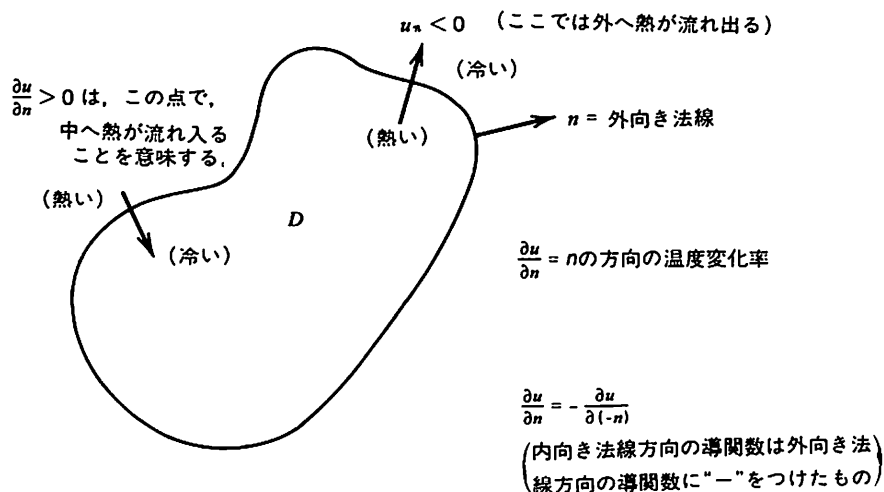


図 3.4 Fourier の法則の説明

$$(3.3) \quad \begin{cases} (x=0 \text{ における}) \text{ 外向きの熱流束} = k \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} \\ (x=L \text{ における}) \text{ 外向きの熱流束} = -k \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} \end{cases}$$

ここで、 k は金属の熱伝導度といい、物質がどのくらいよく熱を伝えるかの尺度である。(ほとんど熱を伝えない物質は零に近い値をとり、一方、銅とかアルミニウムは大きい値をとる。)

Fourier の法則 (3.3) は棒の内部至るところで (ちょうど端点のところは除いて) 実際に成り立つ。たとえば、

$$(3.4) \star \quad (\text{左から右へ}) x_0 \text{ をよぎる熱流束} = -k \frac{\partial u(x_0, t)}{\partial x}$$

図 3.5 を見よ。Fourier の法則 (3.4) によれば、 $u_x(x_0, t) < 0$ なら熱は左から右へ流れ、 $u_x(x_0, t) > 0$ なら点 x_0 を通過する熱の流れは右から左になる (熱は必ず温度の高いところから低いところへ流れる)。

このようにして、熱流束についての二つの式 (3.1) および (3.3) を使って、図 3.3 の実験に対して求める境界条件の数学的な形が得られる。すなわち、

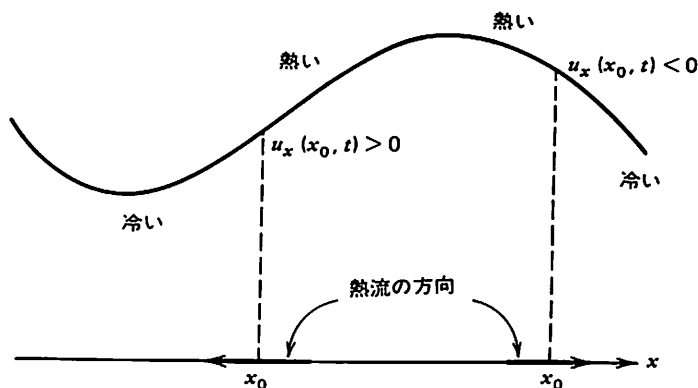


図 3.5 Fourier の法則のもう一つの説明

$$\text{境界条件} \begin{cases} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{h}{k} [u(0, t) - g_1(t)] \\ \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = -\frac{h}{k} [u(L, t) - g_2(t)] \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

定数 h/k のことをよく単に λ と書く. そうすると, 棒の端をよぎる熱の流れに対する境界条件は

$$(3.5) \quad \begin{aligned} u_x(0, t) &= \lambda [u(0, t) - g_1(t)] \\ u_x(L, t) &= -\lambda [u(L, t) - g_2(t)] \end{aligned}$$

となる.

高次元でも似たような境界条件が考えられる. たとえば, 円板の境界が温度 $g(\theta, t)$ の動く流体に接触しているなら, 境界条件は

$$\frac{\partial u(R, \theta, t)}{\partial r} = -\frac{h}{k} [u(R, \theta, t) - g(\theta, t)]$$

となる. ここで $\frac{\partial u}{\partial r}(R, \theta, t)$ は, u の外向き法線方向 (正の r 方向) の導関数の境界上の点 (R, θ) における値を表す. この種の境界条件は線形境界条件と呼ばれる (u と u_r について線形であるから). しかし, 右辺に $g(\theta, t)$ という項があるから, これは非同次な条件である.

第3の型の境界条件（熱流束が与えられている場合——端が絶縁されている場合も特殊な場合として含む）

絶縁された境界というのは、いかなる熱の流れの通過も許さないような境界のことである。したがって、（内向きあるいは外向きの）法線方向の導関数は境界上で零でなければならない（垂直な導関数は熱流束に比例するから）。1次元の棒で $x=0$ および $x=L$ に絶縁された端がある場合には、境界条件は

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= 0 \\ u_x(L, t) &= 0 \end{aligned} \quad (0 < t < \infty)$$

となる。

2次元の領域の場合、絶縁された境界というのは、境界での温度の法線方向の導関数が零であることを意味する。たとえば、円板が境界で絶縁されているときには、境界条件はすべての $0 \leq \theta < 2\pi$ とすべての $0 < t < \infty$ に対して $u_r(R, \theta, t) = 0$ となる。

一方、この円板の境界をよぎって入ってくる熱の量が与えられているときには、境界条件は

$$u_r(R, \theta, t) = f(\theta, t)$$

となる。ここで $f(\theta, t)$ は円板の外の熱源から円板の中へ入ってくる熱量を表す。

さて、このような種々の型の境界条件の例を挙げよう。

1次元熱流の典型的な境界条件

長さ 2 m の銅の棒の側面が絶縁され、初期温度が 0°C であるとする。棒の上の端 ($x=0$) は絶縁されており、下の端 ($x=2$) は一定温度 $g_2(t) = 20^\circ\text{C}$ の流水の中に沈められている（図 3.6）。

次の四つの式がこの問題に対する数学モデルとなる：

$$\begin{aligned} \text{偏微分方程式} \quad & u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad (0 < x < 2, \quad 0 < t < \infty) \\ (3.6) \quad \text{境界条件} \quad & \begin{cases} u_x(0, t) = 0 \\ u_x(2, t) = -\frac{h}{k} [u(2, t) - 20] \end{cases} \quad (0 < t < \infty) \\ \text{初期条件} \quad & u(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq 2) \end{aligned}$$

ここで

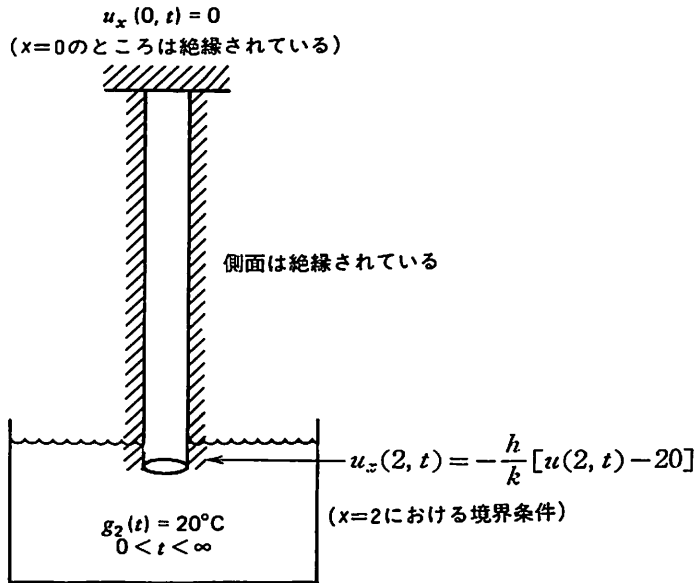


図 3.6 初期値・境界値問題

$$\alpha^2 = 1.16 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} \quad (\text{銅の熱拡散率})$$

$$k = 3.89 \times 10^2 \text{ J/m} \cdot \text{s} \cdot \text{K} \quad (\text{銅の熱伝導度})$$

$$h = \text{熱交換係数}$$

この h を定めること自身、難しい問題である。棒の底面と周囲の水との間で熱がやりとりされる割合を示し、水がどのくらい速く循環するかとか、接触面の性質とか、その他いろいろなものの関数である。この値を定めるには、実験をやらなければならないであろう。

注意

1. 図 3.7 に、一つの典型的な正方形内部の熱流の問題を示す。この問題では、正方形内部の初期温度 $u(x, y, 0)$ ($t=0$) を与えると、その後引続いて図に示す偏微分方程式と境界条件が $0 < t < \infty$ においてずっと成り立ち、それによって以後の温度 $u(x, y, t)$ が決まる。しかし、温度分布がどのようなものであっても、図 3.7 の境界条件は満たさなければならない。

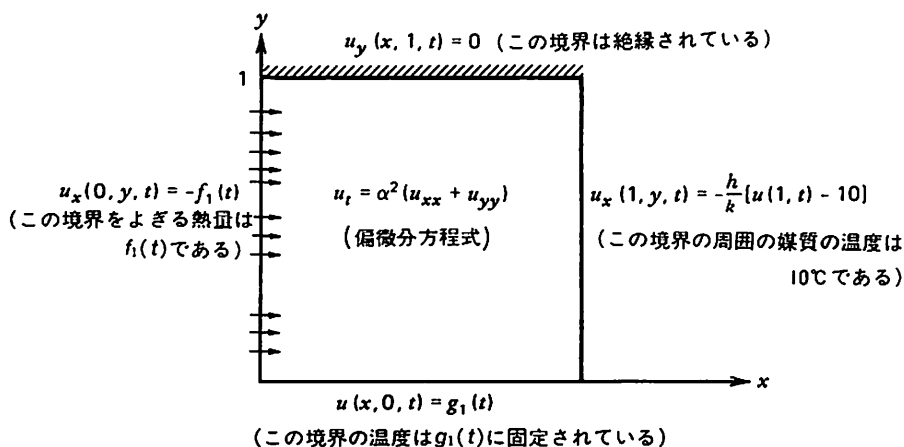


図 3.7 正方形内部の拡散問題に対する典型的な境界条件

2. 円周上の境界条件

$$u_r(R, \theta, t) = -\frac{h}{k}[u(R, \theta, t) - g(\theta, t)]$$

からは境界の温度が $g(\theta, t)$ であることにはならないが、熱交換係数 h が大きいときには実質的には境界の温度 $u(R, \theta, t)$ が $g(\theta, t)$ とほとんど等しいということになる。

練習問題

- 初期値・境界値問題 (3.6) の解のいろいろな時刻における概形を描け。その概形は境界条件を満たしているか。棒の定常状態の温度分布はどうなるか。直観的には、それは明らかか。
- 次の初期値・境界値問題はどうか解釈できるか。

偏微分方程式 $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ ($0 < x < 1$, $0 < t < \infty$)

境界条件
$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u_x(1, t) = 1 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

初期条件 $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ ($0 \leq x \leq 1$)

いろいろな時刻における解の概形を描くことができるか。温度分布は定常になるか。そのことは明らかか。

3. 次の問題の物理的意味は何か。

$$\text{偏微分方程式 } u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad (0 < x < 1, 0 < t < \infty)$$

$$\text{境界条件 } \begin{cases} u_x(0, t) = 0 \\ u_x(1, t) = 0 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

$$\text{初期条件 } u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

いろいろな時刻における解の概形が描けるか。定常状態の温度についてはどうか。

4. 側面が絶縁されていない金属棒の初期温度が 20°C で、その後直ちにその一端を 50°C に固定するものとする。棒の残りの部分を温度 30°C の溶液の中に沈める。この問題を表す初期値・境界値問題はどうか。

参考書

1. H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, 1959. 多くの物理の問題の境界条件を論じた優れた参考書である。
2. C. S. Peskin, *Partial Differential Equations in Biology*, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1976. 神経細胞, 内耳, 心臓の血管組織のような生物現象の偏微分方程式によるモデル化がなされている。

第4課 熱伝導方程式の導出

目的： 熱量保存の法則から1次元の熱伝導方程式

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t)$$

を導き出す方法を示すこと。熱伝導度，熱容量，密度などの物理的概念を論じ，熱が伝わる速度がこれら三つの基本的な物理パラメータにどのように依存するかを示す。基本的な熱伝導方程式の二三の変形についても論じる。

どんな科学の分野においても，まず一組の仮定を自明なものと認めてそこから出発して，それらを基にして他のすべての概念を導き出す。もちろん，ある人にとって自明なことも他の人には疑わしい点があるということもあろう。科学の歴史は，誰もが同意できる出発点に到達しようとして，基本となる公理をどんどんとより根本的なものへと遡って来た歴史でもある。

たとえば，ある人が一つの基本的な仮定——たとえばそれを仮定 B としよう——から関連ある事実がすべて導き出せると考えたとする。その人は，仮定 B から定理 C を証明し，そしてそれから定理 D を証明し，そしてさらに次々と他の定理が証明されたとする（図 4.1）。もちろんこれは科学の進歩である。すなわち，新しい結果がたくさん証明されればされるほど，物理学，化学，生物学は皆このように前進する。

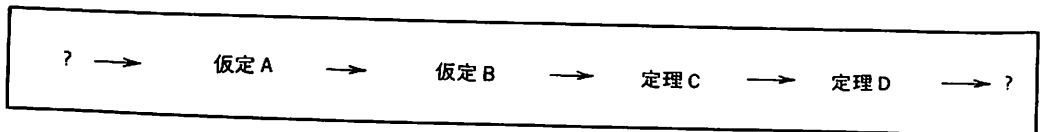


図 4.1 公理的方法

他方，新しい定理を証明する代りに，仮定 B よりもっと基本的な新しい仮定

——たとえばそれを仮定 A としよう——を見いだして、仮定 B が仮定 A から証明できるようにすることができるかどうかを考えてもよい。われわれは、このようにして、まだ知識の未開な分野を次第に開拓していくのである。熱流に関する分野では、エネルギー（熱エネルギー）保存という概念が基本的であり、他の原理はこれから導かれる（図 4.2）。

エネルギーの保存則（仮定） $\longrightarrow u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t)$ $\longrightarrow$ その他の熱流の性質

図 4.2 エネルギーの保存則：熱流問題の基礎

もちろん、この課のことは忘れて、熱伝導方程式を出発点とすることもできよう（熱伝導方程式自身を自明なものであると考える人がいるかもしれない）。しかし、エネルギー保存という仮定は科学の基本にあるのであるから、それでは真面目な学生をごまかすことになろう。科学者はしばしば、ある特定の問題のモデル化を始めるに当たって、まず、エネルギー保存の関係を書き、それからそれを偏微分方程式に書き直すということをする。

さて、この課の目標である熱量保存の方程式から熱伝導方程式を導き出すという本題に戻ろう。

熱伝導方程式の誘導

長さ L の1次元の棒があるとし、次のような仮定をする：

1. 棒は熱を伝導する均質な物質からできている。
2. 棒の側面は絶縁してある（熱は x 方向にだけ流れる）。
3. 棒は細い（断面のすべての点で温度は一定である）。



図 4.3 熱を通す細棒

熱量保存の法則を棒の $[x, x + \Delta x]$ の間の断片に適用すると、

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad & [x, x+\Delta x] \text{ の内部の総熱量の変化} \\
 & = \text{両境界面をよぎる総熱量} \\
 & \quad + [x, x+\Delta x] \text{ の内部で発生する全熱量}
 \end{aligned}$$

ということができる．ところで，任意の時刻 t における $[x, x+\Delta x]$ の内部の全熱量 (J) は次のようにして測られる (この課の参考書 1 を見よ) :

$$[x, x+\Delta x] \text{ の内部の全熱量} = \int_x^{x+\Delta x} c\rho Au(s, t) ds$$

ここで

c = 棒の比熱 (棒の熱を蓄える能力を示す)

ρ = 棒の密度

A = 棒の断面積

式 (4.1) で表される熱エネルギーが保存されるという事実は，微積分の計算によって，

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad & \frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} c\rho Au(s, t) ds = c\rho A \int_x^{x+\Delta x} u_t(s, t) ds \\
 & = kA[u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x, t)] + A \int_x^{x+\Delta x} f(s, t) ds
 \end{aligned}$$

と書くことができる．ここで

k = 棒の熱伝導度 (熱を伝導する能力を示す)

$f(x, t)$ = 熱源 ($\text{J} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$)

そこで，問題は式 (4.2) を積分を含まない形に書き変えることである．読者は積分の平均値の定理を思い出してほしい．

積分の平均値の定理

$f(x)$ が $[a, b]$ で連続な関数であるなら，

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

となるような数 ξ ($a < \xi < b$) が存在する．

この結果を式 (4.2) に適用すると次式が得られる：

$$\begin{aligned}
 c\rho Au_t(\xi, t) \Delta x &= kA[u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x, t)] + Af(\xi, t) \Delta x \\
 & \quad (x < \xi < x+\Delta x)
 \end{aligned}$$

すなわち，

3'

$$u_t(\xi, t) = \frac{k}{c\rho} \left\{ \frac{u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} \right\} + \frac{1}{c\rho} f(\xi, t)$$

最後に、 $\Delta x \rightarrow 0$ とすると、求める結果

$$(4.3) \star \quad u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t) + F(x, t)$$

が得られる。ここで、

$$\alpha^2 = \frac{k}{c\rho} \quad (\text{棒の熱拡散率と呼ぶ})$$

$$F(x, t) = \frac{1}{c\rho} f(x, t) \quad (\text{熱源密度})$$

これでわれわれの話は終わりであるが、最後に、棒の側面が絶縁されていない場合について付け加えておこう。周囲の媒質の温度が 0°C に保たれているとすると、熱は側面をよぎって温度 $u(x, t)$ に比例して出たり入ったりする。この場合、熱量保存の法則は

$$(4.4) \quad u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u + F(x, t)$$

となる。ここで

$$\beta = \text{側面の伝熱係数} \quad (\beta > 0)$$

注意

1. 定数 k は棒の材料の熱伝導度で、底面積 1m^2 、厚さ 1m の板の両底面間の温度差が 1°C (1K) のとき 1 秒間に流れる熱量 (J) を示す。 k の値は理化学定数表にある。代表的な値として、銅は約 $400\text{J/m}\cdot\text{s}\cdot\text{K}$ 、熱の絶縁体では 0 に近い。

棒の材質が一樣であるなら k は x にはよらないが、 k の値が温度 u に依存するような材質もある。そのときには、熱伝導方程式は非線形になる：

$$u_t = \frac{1}{c\rho} \frac{\partial}{\partial x} \{k(u)u_x\}$$

しかし、たいてい、 k は u と共に非常にゆっくりと変化するので、この非線形性は無視される。

2. 定数 c は物質の比熱 (ρc が単位体積あたりの熱容量) であり、物質が蓄えることのできる熱エネルギーの量を示す。たとえば、焼芋は単位質量あたりたくさんの熱を蓄えることができる (そのため熱するのに長く時間がかかる) から、焼芋の熱容量は大きい。詳しくいうと、比熱は、 1kg の物質の温度を 1K (あるいは 1°C) だけ変えるのに必要な熱量 (J; ジュー

ル) のことである. c を x と u に関係ない定数として扱うことが多い. 典型的な物質の比熱の値は理化学定数表に書いてある.

3. 熱流の基本的な量の単位 (SI 単位系) は

u = 温度 (摂氏度 $^{\circ}\text{C}$; ケルビン K)

u_t = 温度の時間変化率 (K/s)

u_x = 温度曲線の傾き (K/m)

u_{xx} = 温度曲線のへこみ方 (K/m^2)

c = 比熱 ($\text{J/kg}\cdot\text{K}$)

k = 熱伝導度 ($\text{J/m}\cdot\text{s}\cdot\text{K}$)

ρ = 密度 (kg/m^3)

α^2 = 熱拡散率 (m^2/s)

4. 物質の熱拡散率 $\alpha^2 = k/c\rho$ はその物質の熱伝導度 k に比例し, 密度 ρ と比熱 c に反比例する. これは直観的にもある程度納得がいくことであろう.

問題

1. 方程式

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u$$

の各変数 $u, u_t, \dots$ にその単位を代入して, 各項が同じ単位 K/s をもつことを確かめよ.

2. 方程式

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - v u_x$$

の各変数にその単位を代入して, 各項が同じ単位をもつことを確かめよ. ただし v の単位は速度 (m/s) である.

3. 熱伝導度 $k(x)$ が x に関係する場合の熱伝導方程式

$$u_t = \frac{1}{c\rho} \frac{\partial}{\partial x} [k(x) u_x] + f(x, t)$$

を導け.

4. 流れ (速度 v) の中の物質の濃度を $u(x, t)$ とし, $u(x, t)$ は拡散と対流との両方の影響で変化するものとする. いかなる時点においても領域 $[x, x + \Delta x]$ の中の物質の全質量が新しく生成されたり消滅したりしないという事実を用いて, 方程式

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - v u_x$$

を導け.

ヒント 次のような保存方程式を考えよ:

$[x, x + \Delta x]$ の中の質量の変化

=境界面をよぎる拡散による変化

+境界面をよぎって物質が運ばれることによる変化

参考書

1. L. A. Pipes, *Applied Mathematics for the Engineer and Physicist*, McGraw-Hill, 1958. 古い参考書であるが現在でも実践的な科学者には良い参考書である。
2. A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*, MacMillan Company, 1963. 方程式の出し方をよく書いた良い本である。同じシリーズの中に *A Collection of Problems on Mathematical Physics* もある。これは学生がもっと偏微分方程式を解く演習をするのに役立つであろう。

第5課 変数分離

目的： 変数分離という強力な方法を導入し、よく知られた拡散の問題を解くのにこの方法がどのように使えるかを示すこと。代数的に複雑な性質をもっているためこの方法がよく理解できない学生もいるので、直観的な説明を随所に交えることにする。

変数分離の基本的な考え方は、問題の初期条件を簡単な成分に分解し、その各成分に対する応答を求め、そして、それらの応答を加え合わせることである。これで任意の初期条件に対する応答を得ることができる。

変数分離の実際の手順の中にはこの基本的な考え方があまりよく見えないかもかもしれないが、この考え方が変数分離法の基本になっていることには変わりはない。

変数分離は初期値・境界値問題を解く技法の中で最も古くからあるものの一つであって、次の形の問題に適用される：

1. 偏微分方程式が線形で同次である（必ずしも定数係数でなくてよい）。
2. 境界条件の形が

$$\alpha u_x(0, t) + \beta u(0, t) = 0$$

$$\gamma u_x(1, t) + \delta u(1, t) = 0$$

である（この形の境界条件を線形同次境界条件と呼ぶ）。 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は定数である。

この方法は Joseph Fourier の時代にまで遡る（実際、変数分離法のことを Fourier の方法と呼ぶこともある）。恐らく最も広く使われている解法（もちろんこれが適用できるような場合）であろう。

この方法の一般論を展開する代りに、一つの適用例を示そう（後でもっと一般的に話をするにすることにする）。次の初期値・境界値問題（拡散問題）を考えよう：

偏微分方程式 $u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad (0 < x < 1, 0 < t < \infty)$

境界条件 $\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$

初期条件 $u(x, 0) = \phi(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$

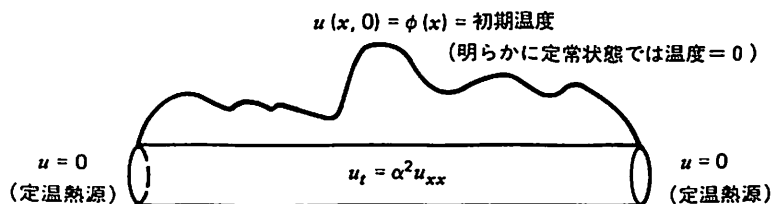


図 5.1 拡散問題

変数分離を行う前に、まず、問題そのもののことを考えてみよう。ここでは両端の温度が零に固定されている有限長の棒があるとしている。この問題に対して、初期条件という形のデータも与えられている。われわれの目標はそれから後の時点における温度 $u(x, t)$ を求めることである。

ここで、方法そのものの話に入ることになるが、まず、その概略を述べよう。

変数分離法の概略

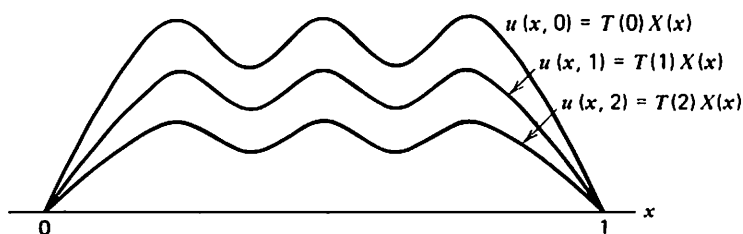
変数分離法では、 $X(x)$ を x の関数、 $T(t)$ を t の関数として、

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

という単純な形をした解を探すことから始める。この形の温度 $u(x, t)$ は、 t のどんな値に対してもその基本的な“形状”を保持するから、この解は単純なのである(図 5.2)。偏微分方程式に対してこのような形の解を無限個(それらは同時に境界条件をも満足する)求めることが可能である。これらの単純な関数 $u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t)$ (基本解と呼ぶ)は問題の基本的な構成要素であり、われわれが求めている解 $u(x, t)$ は、和

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) T_n(t)$$

が初期条件を満足するように、単純な基本解 $X_n(x) T_n(t)$ を加え合わせることで得られる。この和もまた偏微分方程式と境界条件とを満足するから、問題に対する解が得られたことになる。もっと詳細にこのことを述べよう。

図 5.2 t のいろいろな値に対する $X(x)T(t)$ のグラフ

変数分離

〈ステップ 1〉 (偏微分方程式の基本解を求めること)

次の 4 条件を満足する関数 $u(x, t)$ を求めたい:

$$\text{偏微分方程式} \quad u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad (0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty)$$

$$\text{境界条件} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

$$\text{初期条件} \quad u(x, 0) = \phi(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

まず偏微分方程式に $X(x)T(t)$ を代入して $X(x)T(t)$ について解き $u(x, t) = X(x)T(t)$ という形の解を探す。代入により

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t)$$

が得られる。ここで、変数分離法の一番肝心な部分に入る。この式の両辺を $\alpha^2 X(x)T(t)$ で割ると、

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

が得られて、変数が分離されたことになる。すなわち、この式の左辺は t だけに、右辺は x だけに、 x と t は互に独立であるから、両辺はある定数 (たとえば k) でなければならない。したがって

$$\frac{T'}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X} = k$$

と書ける。すなわち、

$$T' - k\alpha^2 T = 0$$

$$X'' - kX = 0$$

である。そこで、これら二つの常微分方程式をそれぞれに解き、それらを掛け

$\lambda > 0$ とするが、 $\lambda = 0$ の場合も同様である。

合わせれば偏微分方程式の解が得られる。(ここでやったことの本質は、2階の偏微分方程式を二つの常微分方程式に変えたことであるということに注意せよ。) しかるに、ここで一つ重要なことに注意しなければならない。すなわち、分離定数 k は負であってほしい(そうでないと、 $t \rightarrow \infty$ のときに $T(t)$ が 0 にならない)。こうするために、普通 $k = -\lambda^2$ とおく ($\lambda \neq 0$; こうすれば $k = -\lambda^2$ は負であることが保証される)。新しい分離定数 λ を使うと、二つの常微分方程式は

$$T' + \lambda^2 \alpha^2 T = 0$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

のように書ける。これらを解こう。両者とも標準的な形の常微分方程式であるから、解は直ちに

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \quad (C \text{ は任意の定数})$$

$$X(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) \quad (A, B \text{ は任意の定数})$$

であることがわかり、したがってすべての関数

$$u(x, t) = e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} [A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)]$$

が偏微分方程式 $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ を満足する (A, B, λ は任意; $T(t) = Ce^{-\lambda^2 \alpha^2 t}$ の任意の定数 C は積 $X(x)T(t)$ を作るときに $X(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)$ の任意定数 A, B の中に繰り入れてしまうことができる)。この事実を確かめることがこの課の練習問題 1 である。ここまでで、偏微分方程式を満たす無限個の関数が得られたことになる。

〈ステップ 2〉 (境界条件を満たす偏微分方程式の解を求めること)

ここまでで、偏微分方程式のたくさんの解を作り出すことができたが、それらの解のすべてが境界条件と初期条件を満足しているわけではない。次のステップは、今得られている解の集団

$$(5.1) \quad e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} [A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)]$$

の中から境界条件

$$u(0, t) = 0$$

$$u(1, t) = 0$$

を満足するような部分集合を選ぶことである。このために、解 (5.1) をこれらの境界条件に代入すると、

$$u(0, t) = Be^{-\lambda^2 \alpha^2 t} = 0 \quad \Rightarrow B = 0$$

$$u(1, t) = Ae^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \sin \lambda = 0 \Rightarrow \sin \lambda = 0$$

が得られる。第2の境界条件から、今まで任意の定数 ($\neq 0$) としていた分離定数 λ に制限が加えられることになる。 λ は方程式 $\sin \lambda = 0$ の根でなければならない。すなわち、 $u(1, t) = 0$ であるためには

$$\lambda = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$$

あるいは、

$$\lambda_n = \pm n\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

と選ぶ必要がある。第2の境界条件だけを見ると $A=0$ でもよいように見えるが、そうすると、(5.1) の解が0になってしまうので、そうおくわけにはいかない。

これで第2ステップは終わった。ここまでで、偏微分方程式と境界条件の両方を満足する無限個の関数

$$(5.2) \star \quad u_n(x, t) = A_n e^{-(n\pi a)^2 t} \sin(n\pi x) \quad (n=1, 2, \dots)$$

が得られたことになる*。これらの関数が解の構成要素をなし、求める解はこれら単純な関数の和として表せることになる。どのように和を作るかは初期条件による。これらの基本解 $u_n(x, t)$ のグラフを図5.3に示す。

〈ステップ3〉 (境界条件と初期条件のすべてを満たす偏微分方程式の解を求めること)

最後の、そして恐らく数学的観点からすると最も興味あるステップは、初期条件

$$u(x, 0) = \phi(x)$$

を満足するように係数 A_n を選んで基本解の和

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi a)^2 t} \sin(n\pi x)$$

を作ることである。この和を初期条件に代入すると

$$(5.3) \quad \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)$$

が得られる。この式から係数 A_n を定めるという問題は、実はフランスの数学者 Joseph Fourier が提起した興味ある問題——初期温度分布 $\phi(x)$ を次のような基本解の和として展開することができるかという問題——である：

$$A_1 \sin(\pi x) + A_2 \sin(2\pi x) + A_3 \sin(3\pi x) + \dots$$

$\phi(x)$ が十分すなおな関数であるならば、たとえば連続で有界変動であるなら

* 関数 u_n と u_{-n} とは符号を除いて本質的には同じものである。 $n < 0$ の方は除いた。

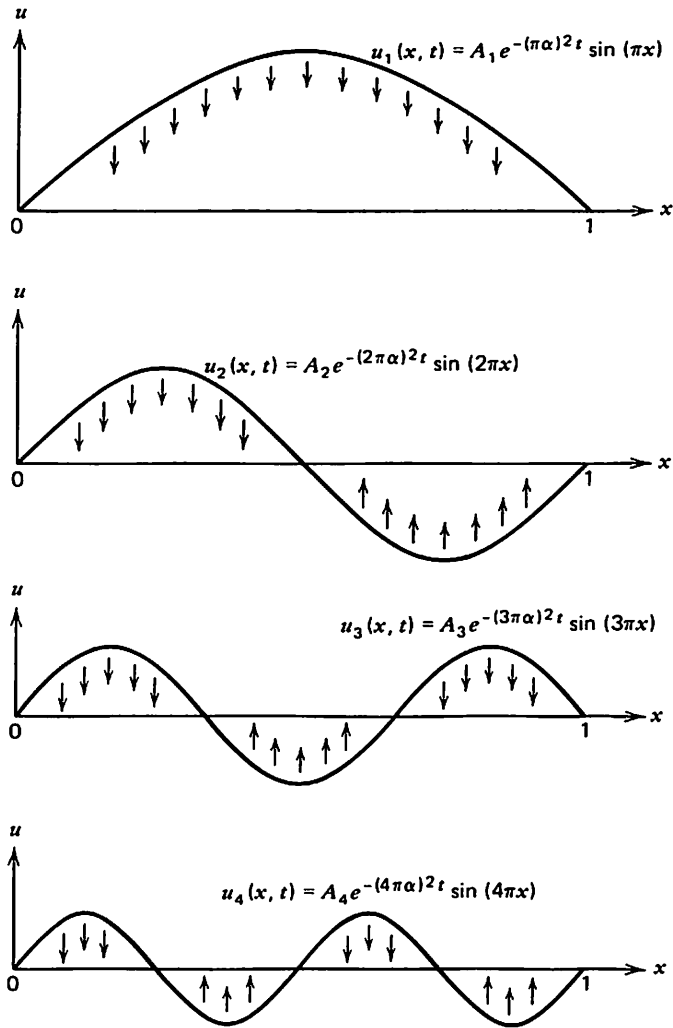


図 5.3 基本解 $u_n(x, t) = A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x)$

ば、この問題の答えは“イエス”である。したがって、問題は係数 A_n をどうやって求めるかということになる。

これは実際には非常に簡単である。すなわち、関数族（関数の集合）

$$\{\sin(n\pi x) ; n=1, 2, \dots\}$$

の直交性という性質を使う。これらの関数は

$$\int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{1}{2} & (m = n) \end{cases}$$

という意味で互いに直交していることがわかる (練習問題2参照). この性質は関数のグラフを描いて眺めてみればわかる (図 5.4).

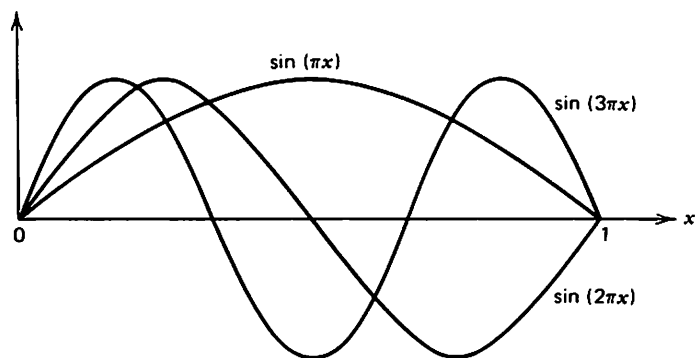


図 5.4 直交関数列

さていよいよ展開式

$$\phi(x) = A_1 \sin(\pi x) + A_2 \sin(2\pi x) + A_3 \sin(3\pi x) + A_4 \sin(4\pi x) + \dots$$

の係数を求めることにする. この式の両辺に $\sin(m\pi x)$ (m は任意の整数) を掛けて, 0 から 1 まで積分すると, 直交性のためにほとんどの項が消えて,

$$\int_0^1 \phi(x) \sin(m\pi x) dx = A_m \int_0^1 \sin^2(m\pi x) dx = \frac{1}{2} A_m$$

が得られる. A_m について解けば

$$A_m = 2 \int_0^1 \phi(x) \sin(m\pi x) dx$$

となる. これで, 求める解が

$$(5.4) \star \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x)$$

と表され, その中の係数 A_n は

$$(5.5) \star \quad A_n = 2 \int_0^1 \phi(x) \sin(n\pi x) dx$$

によって与えられることがわかった. この答えがこの問題の最初の4条件全部を満たしていることを調べて確認することができる. これでステップ3を終了

する。

得られた解がこんなに複雑な形をしているのを見て、学生の多くはがっかりして解を2度と眺めようとしなない(残念なことであるが)。ゆっくり時間をかけてこの解を分析してみるならば、そんなに難しいものではない。実際、解が複雑であればあるほど、そこに含まれている情報の量も多いのである。この解の意味を知る助けとなるような二三の注意を次に挙げる。

注意

1. $\phi(x)$ の Fourier 正弦展開 (5.3) と解 (5.4) との違いは、時間の因子

$$e^{-(n\pi a)^2 t}$$

が各項に掛かっているかどうかだけである。したがって、もし初期条件が

$$\phi(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2} \sin(3\pi x)$$

というような簡単な形をしているならば、解は単に

$$u(x, t) = e^{-(\pi a)^2 t} \sin(\pi x) + \frac{1}{2} e^{-(3\pi a)^2 t} \sin(3\pi x)$$

となるだけである。この場合、 $\phi(x)$ を Fourier 正弦級数に展開すると、

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = 0$$

$$A_3 = \frac{1}{2}$$

$$A_4 = A_5 = \dots = 0$$

が得られる。

2. 解 (5.4) は次のように解釈できる：初期温度 $\phi(x)$ を簡単な関数 $A_n \sin(n\pi x)$ の和の形に展開し、それからその各成分に対する応答 $A_n e^{-(n\pi a)^2 t} \sin(n\pi x)$ を足して初期条件 $u(x, 0) = \phi(x)$ に対応する解を得る。

3. 解

$$u(x, t) = A_1 e^{-(\pi a)^2 t} \sin(\pi x) + A_2 e^{-(2\pi a)^2 t} \sin(2\pi x) + \dots$$

の各項は x と t の関数である。この級数の先の方の項は

$$e^{-(n\pi a)^2 t}$$

という因子のために非常に速く小さくなることに注意せよ。したがって、長い間には、解は第1項に近似的に等しくなる：

$$u(x, t) \cong A_1 e^{-(\pi a)^2 t} \sin(\pi x)$$

また、この第1項は時間と共に減衰する正弦曲線の形をしている (図 5.5).

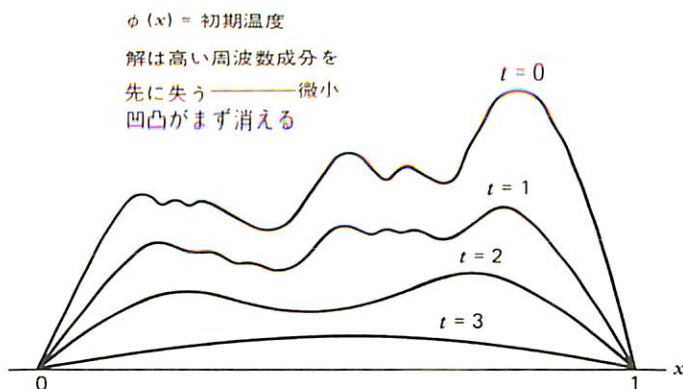


図 5.5 拡散問題では高次の項は速やかに減衰する

練習問題

1. A, B, λ を任意定数として, $u(x, t) = e^{-\lambda^2 a^2 t} [A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)]$ が偏微分方程式 $u_t = a^2 u_{xx}$ を満足することを示せ.

$$2. \int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{1}{2} & (m = n) \end{cases}$$

であることを示せ.

ヒント 恒等式

$$\sin(m\pi x) \sin(n\pi x) = \frac{1}{2} [\cos(m-n)\pi x - \cos(m+n)\pi x]$$

を使え.

3. $\phi(x) = 1$ ($0 \leq x \leq 1$) の Fourier 正弦展開を求めよ. 初めの3項あるいは4項の和の図を描け.
4. 練習問題3の結果を使うと, 初期値・境界値問題
 偏微分方程式 $u_t = u_{xx}$ ($0 < x < 1$)
 境界条件 $\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases}$ ($0 < t < \infty$)
 初期条件 $u(x, 0) = 1$ ($0 \leq x \leq 1$)

の解はどうなるか。(棒の両端の温度を1度から0度に瞬時に引き下げようというのであるから、この問題は物理的には不可能であることに注意せよ。たいていの問題において、境界条件が0なら、初期温度 $\phi(x)$ も $x=0$ と $x=1$ で0でなければならない。)

5. 練習問題4の初期条件を

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x) + \frac{1}{3} \sin(4\pi x) + \frac{1}{5} \sin(6\pi x)$$

に変えたら解はどうなるか。

6. 練習問題4の初期条件が

$$u(x, 0) = x - x^2 \quad (0 < x < 1)$$

なら解はどうなるか。

参考書

Tyn Myint-U, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Elsevier, 1973. 本書よりいくぶん程度の高い良く書かれた教科書である。第6章は変数分離に関する大きな章で良い問題をいくつも取り扱っている。

第6課 非同次境界条件を 同次境界条件に変換すること

目的： 初期値・境界値問題

$$\text{偏微分方程式} \quad u_t - \alpha^2 u_{xx} = f(x, t)$$

$$\text{境界条件} \quad \begin{cases} \alpha_1 u_x(0, t) + \beta_1 u(0, t) = g_1(t) \\ \alpha_2 u_x(L, t) + \beta_2 u(L, t) = g_2(t) \end{cases}$$

$$\text{初期条件} \quad u(x, 0) = \phi(x)$$

を

$$U_t - \alpha^2 U_{xx} = F(x, t)$$

$$\alpha_1 U_x(0, t) + \beta_1 U(0, t) = 0$$

$$\alpha_2 U_x(L, t) + \beta_2 U(L, t) = 0$$

$$U(x, 0) = \bar{\phi}(x)$$

というような、(境界条件が零の) 新しい初期値・境界値問題に変換する方法を示すこと。この新しい問題は、次のようにして解くことができる：

1. 新しい偏微分方程式がもし同次 ($F(x, t) = 0$) なら、変数分離法による
 2. $F(x, t) \neq 0$ なら、積分変換や固有関数展開の方法による
-

前の課で述べた変数分離の方法は非常に強力で、見事な級数解を与えるけれども、すべての問題がそれで解決するというわけではないということも知っていなければならない。変数分離を適用するには境界条件は次のような形(線形同次境界条件)をしていなければならない：

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \alpha_1 u_x(0, t) + \beta_1 u(0, t) &= 0 \\ \alpha_2 u_x(L, t) + \beta_2 u(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

この課の目的は

偏微分方程式 $u_t = \alpha^2 u_{xx}$

$$(6.2) \quad \text{境界条件} \quad \begin{cases} \alpha_1 u_x(0, t) + \beta_1 u(0, t) = g_1(t) \\ \alpha_2 u_x(L, t) + \beta_2 u(L, t) = g_2(t) \end{cases} \quad (\text{非同次境界条件})$$

初期条件 $u(x, 0) = \phi(x)$

のような非同次境界条件をもつ問題も、境界条件が零の問題に変換して解くことができるということを示すことである。そして、新しい問題は（固有関数展開のような）他の方法で解くことができる。まず、非同次境界条件をもつ非常に簡単な問題を境界条件が零の問題に変換する話から始めよう。

非同次境界条件を同次境界条件に変換すること

両端が一定の温度 k_1 および k_2 に保たれた絶縁された棒の中の熱の流れを考えよう。すなわち、

偏微分方程式 $u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad (0 < x < L, 0 < t < \infty)$

$$(6.3) \quad \text{境界条件} \quad \begin{cases} u(0, t) = k_1 \\ u(L, t) = k_2 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

初期条件 $u(x, 0) = \phi(x) \quad (0 \leq x \leq L)$

ここで難しいのは、境界条件が同次でないため、この問題を変数分離で解くことができないことである。しかし、境界の温度 k_1 と k_2 の間を（ x 方向に）直線的に変化する定常解（ $t = \infty$ の解）が存在することは明らかである（図 6.1）。いいかえれば、温度 $u(x, t)$ を二つの成分の和と考えたらよさそうである。

$$u(x, t) = \text{定常の成分} + \text{過渡成分}$$

十分時間が経った後の
終局的な解

解のうち初期条件に関する
部分（0 に収束する）

$$= \left[k_1 + \frac{x}{L} (k_2 - k_1) \right] + U(x, t)$$

このような和の形に書けるとして、過渡成分 $U(x, t)$ を求めることにしよう。

$$u(x, t) = \left[k_1 + \frac{x}{L} (k_2 - k_1) \right] + U(x, t)$$

を一番最初の問題 (6.3) に代入すると、 $U(x, t)$ についての新しい問題が得ら

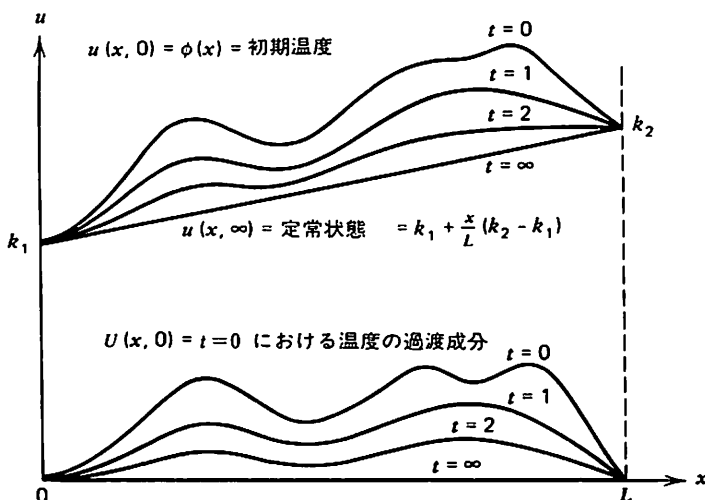


図 6.1 時間をいろいろに変えたときの (6.3) の解

れる。そこで、この新しい問題を $U(x, t)$ について解き、それに定常成分を足せば $u(x, t)$ が得られる。(6.3) への代入計算をすると、

$$\begin{aligned}
 & \text{偏微分方程式} \quad U_t = \alpha^2 U_{xx} \quad (0 < x < L) \\
 (6.4) \quad & \text{境界条件} \quad \begin{cases} U(0, t) = 0 \\ U(L, t) = 0 \end{cases} \quad (0 < t < \infty) \\
 & \text{初期条件} \quad U(x, 0) = \phi(x) - \left[k_1 + \frac{x}{L}(k_2 - k_1) \right]
 \end{aligned}$$

$\nearrow$
 $\bar{\phi}(x) = \text{新しい初期条件 (既知である)}$

が得られる。この問題は (幸いにも) 同次偏微分方程式と同次境界条件になる。したがって変数分離で解ける。実際、読者は

$$\begin{aligned}
 (6.5) \quad U(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi\alpha/L)^2 t} \sin(n\pi x/L) \\
 a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \bar{\phi}(\xi) \sin(n\pi\xi/L) d\xi
 \end{aligned}$$

という解を思い起こすであろう。

境界面の温度が一定の棒についてはこれで話を終わる。もっと実用的な形、つまり微分を含んだ境界条件で右辺が時間とともに変化するようなものについて

てはどうなるか。考え方は上の問題と同じであるがもう少し複雑である。

時間とともに変化する境界条件を右边が零の形に変換すること

次の典型的な問題を考えよう：

$$\text{偏微分方程式 } u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad (0 < x < L, \quad 0 < t < \infty)$$

$$(6.6) \quad \text{境界条件} \quad \begin{cases} u(0, t) = g_1(t) \\ u_x(L, t) + hu(L, t) = g_2(t) \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

$$\text{初期条件} \quad u(x, 0) = \phi(x) \quad (0 \leq x \leq L)$$

右边が零でない境界条件を同次形にするため、(いろいろな形を試してみて)

$$(6.7) \quad u(x, t) = A(t) \left[1 - \frac{x}{L} \right] + B(t) \left[\frac{x}{L} \right] + U(x, t)$$

という形の解を探すことにする。ここで、 $A(t)$ 、 $B(t)$ は、定常成分

$$(6.8) \quad S(x, t) = A(t) \left[1 - \frac{x}{L} \right] + B(t) \left[\frac{x}{L} \right]$$

が問題の境界条件を満たすように選ぶ。このようにすると、変換後の $U(x, t)$ に関する問題の境界条件は同次になる。 $S(x, t)$ を境界条件

$$S(0, t) = g_1(t)$$

$$S_x(L, t) + hS(L, t) = g_2(t)$$

に代入すると、 $A(t)$ と $B(t)$ を求めるための二つの式が得られる。それらの式から

$$A(t) = g_1(t)$$

$$(6.9) \quad B(t) = \frac{g_1(t) + Lg_2(t)}{1 + Lh}$$

が得られる。したがって、

$$u(x, t) = g_1(t) \left[1 - \frac{x}{L} \right] + \frac{g_1(t) + Lg_2(t)}{1 + Lh} \left[\frac{x}{L} \right] + U(x, t)$$

である。これを最初の問題 (6.6) に代入すると、変換後の $U(x, t)$ に関する問題

$$\text{偏微分方程式 } U_t = \alpha^2 U_{xx} - S_t \quad (\text{非同次偏微分方程式})$$

$$(6.10) \quad \text{境界条件} \quad \begin{cases} U_x(L, t) + hU(L, t) = 0 \\ U(0, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{同次境界条件})$$

$$\text{初期条件} \quad U(x, 0) = \phi(x) - S(x, 0) \quad (\text{新しい初期条件——既知})$$

が得られる (確かめてみよ)。こうして、右边が零であるような境界条件をも

つ新しい問題（不幸なことに偏微分方程式は非同次になるが）が得られた。この問題は変数分離で解くことはできないが、もう少し先の課に進んだところで、積分変換や固有関数展開を使って解く方法を示そう。

注意

1. この課の目標は非同次の境界条件をもつ問題を右边が零の境界条件をもつ問題に変換することであった。そのようにして新しくできた偏微分方程式がたまたま同次であれば、変数分離によって問題を解くことができるので具合がよい（最初の例のように）。

一方、新しく変換してできた偏微分方程式が非同次であれば、何か他の方法で新しい問題を解かなければならない。

2. 最も一般的な線形非同次境界条件

$$\begin{aligned}\alpha_1 u_x(0, t) + \beta_1 u(0, t) &= g_1(t) \\ \alpha_2 u_x(L, t) + \beta_2 u(L, t) &= g_2(t)\end{aligned}$$

もまた、第2の例で使った技巧と同じようなものを使って、右边が零の境界条件に変換できる。もちろん、新しい偏微分方程式は、ほとんどの場合、非同次になってしまう。

3. 境界条件が同次であることを全く必要としないような解法、したがってこの課でやったような予備的な変換など必要のない解法もいくつかある。後の課で、ラプラス変換を学ぶ際に、境界条件の右边が零でなくてもよいということがわかるであろう（その方法のほうがこの課の方法より易しいこともある）。

4.
$$\begin{aligned}u(0, t) &= g_1(t) \\ u(L, t) &= g_2(t)\end{aligned}$$

という形の境界条件に対しては、第2の例で述べた方法によると

$$u(x, t) = \left\{ g_1(t) + \frac{x}{L} [g_2(t) - g_1(t)] \right\} + U(x, t)$$

という変換が得られる。

練習問題

1. 初期値・境界値問題

$$\text{偏微分方程式 } u_t = \alpha^2 u_{xx} + x \cos t \quad (0 < x < 1)$$

$$\text{境界条件} \quad \begin{cases} u(0, t) = 1 \\ u_x(1, t) + hu(1, t) = 1 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

$$\text{初期条件} \quad u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を右边が零の境界条件に変換することによって解け.

2. 偏微分方程式 $u_t = u_{xx} \quad (0 < x < 1)$

$$\text{境界条件} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 1 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

$$\text{初期条件} \quad u(x, 0) = x^2 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を, 右边が零の境界条件に変換して解け. この問題の解は, いろいろな時刻において, どんな様子をしているか. それらは読者の直観と一致するか. 定常解は何か. 過渡成分はどんな様子をしているか.

3. 偏微分方程式 $u_t = u_{xx} \quad (0 < x < 1)$

$$\text{境界条件} \quad \begin{cases} u_x(0, t) = 0 \\ u_x(1, t) + hu(1, t) = 1 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

$$\text{初期条件} \quad u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を, 右边が零の境界条件をもつ新しい問題に変換せよ. 新しい偏微分方程式は同次か.

参考書

R. L. Street, *Analysis and Solution of Partial Differential Equations*, Brooks-Cole, 1973. この優れた教科書には, この課で述べたような変換について詳しく述べた節と変数分離について良く書いた節とが含まれている.

第7課 もっと複雑な問題を 変数分離で解くこと

目的：より複雑な熱流問題の変数分離による解法を示すこと。この課では、一つの問題をきちんと解いてみて、読者に変数分離法に慣れてもらうことを目指している。ここで説明する考え方を押し進めて、読者各自がもっている問題を解くことができるようになって頂きたい。

Sturm-Liouville (ステュルム・リウヴィル) 問題として知られる固有値問題を導き、これら一般的な問題のいくつかの性質について話をする。

この課の目的は、読者が自力でやろうとすると厄介そうな初期値・境界値問題を変数分離法で解いてみせることである。読者は、この問題を参考にして、本書で特に触れないような他の問題にもこの方法を当てはめてみるができるであろう。

まず、境界条件の一つが導関数を含んでいるような1次元の熱流問題から始めよう。

境界条件が導関数を含む熱流問題

図のような装置を考えよう。棒の上端の温度は $u(0, t) = 0$ に固定されている。棒の下端は一定温度0（基準温度を0としている）を保っている水溶液の中へ浸す。熱の自然な流れ（Newton の冷却の法則）から、 $x=1$ における境界条件は

$$u_x(1, t) = -hu(1, t) \quad (h > 0)$$

である。さて、棒の初期温度を $u(x, 0) = x$ とし、その直後から ($t > 0$) 上記の境界条件を適用するものとしよう。爾後の温度を求めるには、初期値・境界値問題

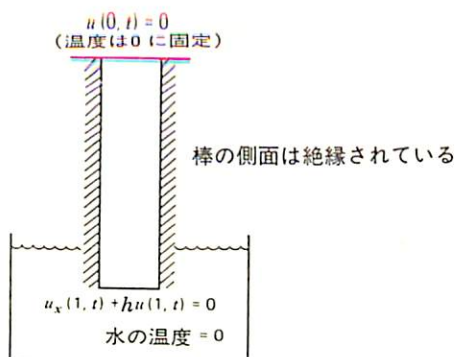
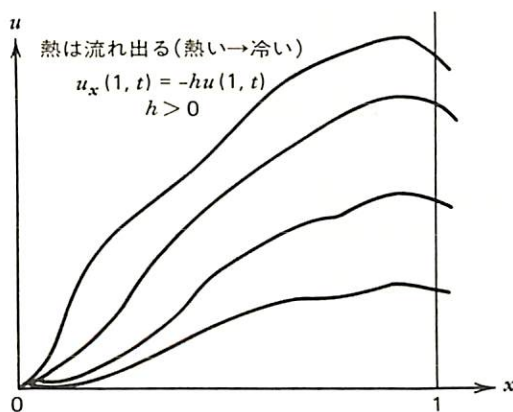


図 7.1 初期値・境界値問題の図

図 7.2 境界条件 $u(0, t) = 0$; $u_x(1, t) = -hu(1, t)$ を満足する曲線の性質

$$\text{偏微分方程式 } u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad (0 < x < 1, 0 < t < \infty)$$

$$(7.1) \quad \text{境界条件} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u_x(1, t) + hu(1, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{同次境界条件})$$

$$\text{初期条件} \quad u(x, 0) = x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を解かなければならない。変数分離法を適用するため、次のステップを踏む。

〈ステップ 1〉 (偏微分方程式を二つの常微分方程式に分ける)

$u(x, t) = X(x)T(t)$ を偏微分方程式に代入すると

$$XT' = \alpha^2 X''T$$

となるが、これを $\alpha^2 XT$ で割ると

$$\frac{T'}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X}$$

となる。左辺は時間 t だけの関数、右辺は x だけの関数で、しかも x と t は独立だから、この式の両辺は定数でなければならない。その定数を μ とすると二つの常微分方程式

$$(7.2) \quad \begin{aligned} T' - \mu \alpha^2 T &= 0 \\ X'' - \mu X &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。これで変数分離過程は完了した。

〈ステップ 2〉 (分離定数を定める)

まず、 μ は正にはなりえない。もし正であるとする、 $T(t)$ が指数関数的に無限に大きくなる (そして $u = XT$ が無限大になるが、物理的考察よりそのようなことはありえない) からである。

次に、 $\mu = 0$ と仮定する。すると

$$X'' = 0, \quad T' = 0$$

となり、従って

$$X(x) = A + Bx, \quad T(t) = C$$

である。ところが、この問題の境界条件は

$$u(0, t) = AC = 0$$

$$u_x(1, t) + hu(1, t) = [B(1+h) + Ah]C = 0$$

であるから、

$$C = 0 \quad \text{または} \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

という結果になってしまう。これは $u(x, t) = 0$ を意味する。いいかえれば、 $\mu = 0$ とすると $u = 0$ という解しか得られない。したがって、 $\mu = 0$ の場合は捨てる (われわれは非零の解を探しているのだから)。

最後に、 $\mu < 0$ の場合を考える。 $\mu = -\lambda^2$ とおけば、二つの常微分方程式 (7.2) は

$$\begin{aligned} T' + \lambda^2 \alpha^2 T &= 0 \\ X'' + \lambda^2 X &= 0 \end{aligned}$$

と書けるが、これから

$$T(t) = Ce^{-(\lambda a)^2 t}$$

$$X(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)$$

という解が得られる。したがって、任意の λ 、任意の A, B に対して

$$(7.3) \quad u(x, t) = e^{-(\lambda a)^2 t} [A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)]$$

の形をした関数はすべて上の偏微分方程式を満たすことになる（計算は読者自身で確かめることができる）。次にやりたいことは、この関数のうちどれだけが境界条件

$$(7.4) \quad \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u_x(1, t) + hu(1, t) = 0 \end{cases}$$

を満足するかを調べることである。解 (7.3) を境界条件 (7.4) に代入すると、 λ, A, B が満たさなければならない条件が得られる。すなわち

$$Be^{-(\lambda a)^2 t} = 0 \quad \Rightarrow B = 0$$

$$A\lambda e^{-(\lambda a)^2 t} \cos \lambda + hAe^{-(\lambda a)^2 t} \sin \lambda = 0$$

この最後の式を少し変形すると、 λ に対する所望の条件

$$\tan \lambda = -\lambda/h$$

が得られる。つまり、 λ を求めるには、曲線 $\tan \lambda$ と $-\lambda/h$ との交点を求めなければならない（図 7.3）。これらの値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ は、与えられた h に対して、数値的に計算機を使って計算できる。これらの値は、境界値問題

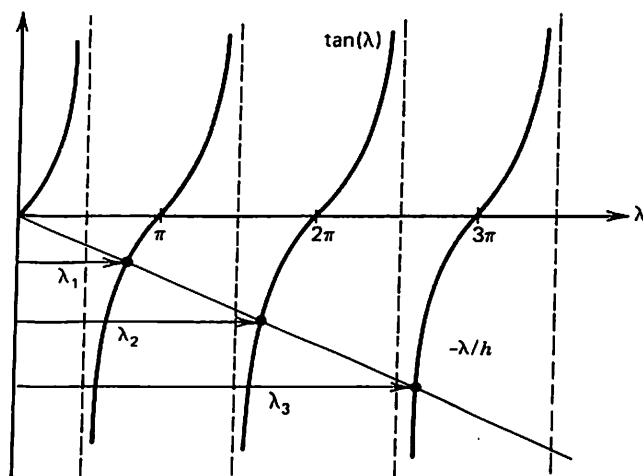


図 7.3 $\tan \lambda$ と $-\lambda/h$ との交点を示すグラフ

λ でなく
 λ^2 のことも固有値
 という。

(7.5)

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(1) + hX(1) = 0 \end{cases}$$

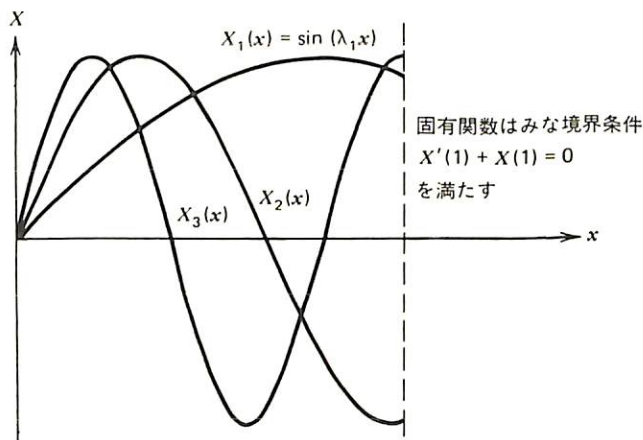
の固有値と呼ばれる。いいかえれば、固有値とは非零の解が存在するような λ の値のことである。(7.5) の固有値 λ_n (今の場合, $\tan \lambda = -\lambda/h$ の根) を ($h=1$ に対して) 数値的に計算し, その始めの方の 10 個の値を表にしたのが表 7.1 である。

表 7.1 $\tan \lambda = -\lambda$ の根

n	λ_n
1	2.02876
2	4.91318
3	7.97867
4	11.0855
5	14.2074
6	17.3364
7	20.4692
8	23.6043
9	26.7409
10	29.8786

固有値 λ_n に対応する (7.5) の解を固有関数 $X_n(x)$ と呼ぶ。この問題では

$$X_n(x) = \sin(\lambda_n x)$$

図 7.4 $h=1$ に対する (7.5) の固有関数 $X_n(x)$

である。図 7.4 を見よ。

〈ステップ 3〉 (基本解を求める)

これまでに偏微分方程式と境界条件を満足する関数 (基本解)

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = e^{-(\lambda_n \alpha)^2 t} \sin(\lambda_n x)$$

が無数個得られている。最後のステップは、 $t=0$ のときの初期条件に適合するようにこれらの関数を足し合わせることである (偏微分方程式も境界条件もともに線形で同次であるから、この和もまた偏微分方程式と境界条件を満足する)。つまり、初期条件 $u(x, 0) = x$ を満足するように和

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) T_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n \alpha)^2 t} \sin(\lambda_n x) \end{aligned}$$

を作る。すなわち

$$(7.6) \quad u(x, 0) = x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\lambda_n x)$$

である。いよいよ最後のステップに移る。

〈ステップ 4〉 (初期条件を固有関数の和に展開する)

固有関数展開 (7.6) の係数 a_n を求めるためにこの式の両辺に $\sin(\lambda_m x)$ を掛け、 x について 0 から 1 まで積分する。すなわち*

$$\begin{aligned} \int_0^1 \xi \sin(\lambda_m \xi) d\xi &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^1 \sin(\lambda_n \xi) \sin(\lambda_m \xi) d\xi \\ &= a_m \int_0^1 \sin^2(\lambda_m \xi) d\xi \\ &= a_m \left(\frac{\lambda_m - \sin \lambda_m \cos \lambda_m}{2 \lambda_m} \right) \end{aligned}$$

a_m について解けば求める結果が得られる (a_m を a_n と書き直す):

$$(7.7) \quad a_n = \frac{2 \lambda_n}{\lambda_n - \sin \lambda_n \cos \lambda_n} \int_0^1 \xi \sin(\lambda_n \xi) d\xi$$

ゆえに、(7.1) の解は

$$(7.8) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n \alpha)^2 t} \sin(\lambda_n x)$$

で、係数 a_n は (7.7) で与えられる。この問題の定数 a_n の始めの 10 個を計

* $\int_0^1 \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_m x) dx = 0$ ($\lambda_n \neq \lambda_m$) であることは後の“注意”の性質 3 による。

算すると、表 7.2 に示す通りとなる ($h=1$)。

表 7.2 (7.8) の係数 a_n

n	a_n
1	0.72918
2	-0.15616
3	0.06140
4	-0.03216
5	0.01967
6	-0.01324
7	0.00951
8	-0.00716
9	0.00558
10	-0.00447

したがって、初期値・境界値問題

$$\begin{aligned}
 &\text{偏微分方程式} \quad u_t = u_{xx} \quad (0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty) \\
 (7.9) \quad &\text{境界条件} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u_x(1, t) + u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (0 < t < \infty) \\
 &\text{初期条件} \quad u(x, 0) = x \quad (0 \leq x \leq 1)
 \end{aligned}$$

の解の最初の 4 項は

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & 0.73 e^{-4.12t} \sin(2.03x) - 0.16 e^{-24.1t} \sin(4.91x) \\
 & + 0.06 e^{-63.7t} \sin(7.98x) - 0.03 e^{-123t} \sin(11.1x) + \dots
 \end{aligned}$$

である。図 7.5 にはこの解のグラフを時間をいろいろに変えて描いてある。こ

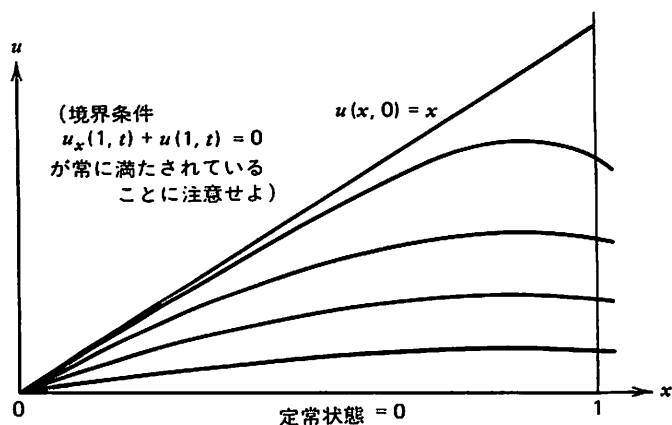


図 7.5 (7.8) の解

の解が自分の直観と一致するかどうか、また問題の境界条件を満足するかどうか、読者は自分で考えてみるとよい。

注意

固有値問題 (7.5) は **Sturm-Liouville 問題** と呼ばれる一般的な問題

$$(7.10) \quad \begin{aligned} &\text{常微分方程式} \quad [p(x)y']' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \quad (0 < x < 1) \\ &\text{境界条件} \quad \begin{cases} \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0 \\ \alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

の特殊な場合である。変数分離により線形同次境界条件をもつ偏微分方程式を解くとき、 $X(x)$ についての常微分方程式とその境界条件は、常にある特殊な Sturm-Liouville 問題となる。固有値問題 (7.5) が (7.10) の特殊な場合であることはわかるであろう。

Sturm と Liouville が証明したことは、関数 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ がある適当な条件を満足していれば、問題 (7.10) は

1. 固有値の無限列

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \cdots \rightarrow \infty$$

をもち、

- 固有値 λ_n のそれぞれに対応して、非零解 $y_n(x)$ がちょうど1個 ($y_n(x)$ の定数倍は除く) 存在する。
- $y_n(x)$ と $y_m(x)$ とが ($\lambda_n \neq \lambda_m$ に対応する) 二つの異なる固有関数であるとき、これらは区間 $[0, 1]$ で重み関数 $r(x)$ に関して直交している、すなわち

$$\int_0^1 r(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0$$

を満足する。

Sturm-Liouville 型の問題の詳細は“参考書1と2”に書いてある。

練習問題

- 次の熱流問題を変数分離によって解け。

$$\text{偏微分方程式} \quad u_t = u_{xx} \quad (0 < x < 1, 0 < t < \infty)$$

$$\text{境界条件} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u_x(1, t) = 0 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

$$\text{初期条件} \quad u(x, 0) = x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

その解は直観と一致するか. 定常解は何か.

2. Sturm-Liouville 問題

常微分方程式 $X'' + \lambda X = 0 \quad (0 < x < 1)$

$$\text{境界条件} \quad \begin{cases} X(0) = 0 \\ X'(1) = 0 \end{cases}$$

の固有値と固有関数は何か. この式を一般的な Sturm-Liouville 問題とみなしたときの関数 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ は何か.

3. 両端が熱的に絶縁されている場合を表す次の問題を解け.

偏微分方程式 $u_t = u_{xx} \quad (0 < x < 1, 0 < t < \infty)$

$$\text{境界条件} \quad \begin{cases} u_x(0, t) = 0 \\ u_x(1, t) = 0 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

初期条件 $u(x, 0) = x \quad (0 \leq x \leq 1)$

得られた解は問題の物理的解釈と一致するか. 定常解は何か. なるほどと思えるか.

4. 常微分方程式 $X'' + \lambda X = 0 \quad (0 < x < 1)$

$$\text{境界条件} \quad \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(1) = 0 \end{cases}$$

の固有値と固有関数は何か.

参考書

1. W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary-Value Problems*, John Wiley & Sons, 1965. Chapter 11. これは常微分方程式の教科書で, Sturm Liouville 問題に関する優れた節がある. 常微分方程式についての良い学部用教科書の一つである.
2. E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, 1967. この本には典型的な問題を解いた例がたくさん含まれている. 読みやすい本である.

第8課 難しい方程式を簡単な 方程式に変えること

目的： $u(x, t)$ についての偏微分方程式を新しい未知関数 $w(x, t)$ についての新しい（より易しい）偏微分方程式に変換する方法を示すこと。どんな変換をすればよいかは一般には直観による。この課では偏微分方程式

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u$$

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - vu_x$$

を、それぞれ、変換

$$u(x, t) = e^{-\beta t} w(x, t)$$

$$u(x, t) = e^{v\{x - (vt/2)\}/(2\alpha^2)} w(x, t)$$

によって簡単な熱伝導方程式

$$w_t = \alpha^2 w_{xx}$$

に変換する。変換後の熱伝導方程式（これは易しい偏微分方程式である）を解いて $w(x, t)$ を求める。そうすれば、元の方程式の解は

$$u = e^{-\beta t} w(x, t)$$

$$u = e^{v\{x - (vt/2)\}/(2\alpha^2)} w(x, t)$$

として求められる（もちろん、境界条件、初期条件も変換しなければならない）。

読者は、前の2課の話から、変数分離で解ける偏微分方程式の型は

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

しかないという印象をもったかもしれない。熱伝導方程式が、変数分離で解くのに一番易しい放物型偏微分方程式であることは事実であるが、変数分離で解ける方程式は決してそれだけではない。すでに述べたように、方程式が線形で

同次であれば、変数分離ができる。たとえば、円内部の2次元の熱流は方程式

$$u_t = \alpha^2 \left[u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right]$$

で表される。この式は変数係数であるが、やはり三つの常微分方程式に分離することができる。

この課では、偏微分方程式を直接解こうとするよりも、一旦より易しいものに変換した方がよい場合もあるということを示す。そんな場合には、そのより易しい問題を（変数分離、その他の方法で）解くのがよい。一つの例でこの技巧を説明しよう。

側面熱損失のある熱流問題を側面が絶縁されている問題へ変換すること

次のような問題を考えよう：

$$(8.1) \quad \begin{aligned} &\text{偏微分方程式} \quad u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u \quad (0 < x < 1, 0 < t < \infty) \\ &\text{境界条件} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (0 < t < \infty) \\ &\text{初期条件} \quad u(x, 0) = \phi(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \end{aligned}$$

ここで、偏微分方程式の項 $-\beta u$ は側面をよぎる熱流を表す（図 8.1）。

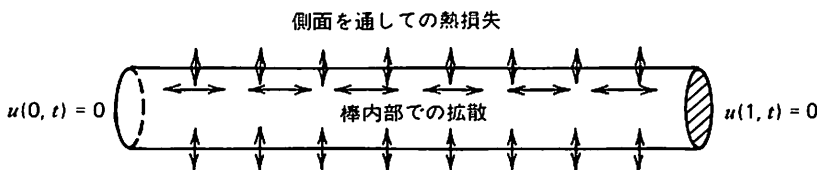


図 8.1 方程式 $u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u$ によって表される熱の流れ

この課の目標は、 $u(x, t)$ の代りに新しい温度 $w(x, t)$ を導入し、 w についての偏微分方程式が元の式

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u$$

よりも単純な形になるようにすることである。これは偏微分方程式を扱うとき広く使われる方法であって、一般には、元の偏微分方程式の解がどのように振舞うかの直観的感覚に基づいて変換の仕方をきめる。たとえば、われわれの間

題(8.1)では、任意の点 x_0 における温度 $u(x_0, t)$ は、二つの現象

1. 棒内部の熱の拡散 (項 $\alpha^2 u_{xx}$ による)
2. 側面を通しての熱流 (項 $-\beta u$ による)

の結果として変化する。重要な点は、もし棒の内部での拡散がなければ ($\alpha = 0$)、各点 x_0 の温度は式

$$u(x_0, t) = u(x_0, 0)e^{-\beta t}$$

に従って指数的に零に向かって“減衰”するであろうということである。この点に着目すれば、問題(8.1)の温度 $u(x, t)$ を二つの因子の積

$$(8.2) \quad u(x, t) = e^{-\beta t} w(x, t)$$

すなわち

$$\text{非絶縁温度} = e^{-\beta t} \times (\text{絶縁温度})$$

に分解してみたかどうかという考えに至るであろう。ここで $w(x, t)$ は拡散だけによる温度を表す。この式を問題(8.1)に代入すると何が起きるかを眺めてみよう。この代入計算は全く機械的な計算である(読者が自分でやってみることができる)。すると、

$$(8.3) \quad \begin{array}{ll} \text{偏微分方程式} & w_t = \alpha^2 w_{xx} \quad (0 < x < 1, 0 < t < \infty) \\ \text{境界条件} & \begin{cases} w(0, t) = 0 \\ w(1, t) = 0 \end{cases} \quad (0 < t < \infty) \\ \text{初期条件} & w(x, 0) = \phi(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \end{array}$$

という式に到達する。この偏微分方程式は、 $-\beta u$ を含まないという点を除いて、最初の問題と全く同じである。したがって、(8.1)を解くためには、変換した問題(8.3)を解き、解 $w(x, t)$ に $e^{-\beta t}$ を掛けるという手順を経さえすればよい。(8.3)は既に変数分離法を使って解いたことがある。その解は

$$(8.4) \quad \begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x) \\ a_n &= 2 \int_0^1 \phi(\xi) \sin(n\pi\xi) d\xi \end{aligned}$$

であった。ゆえに、元の問題(8.1)の解は

$$u(x, t) = e^{-\beta t} w(x, t)$$

である。次の“注意”の中の例もこの方法で解いてある。

注意

1. 問題

$$\begin{aligned}
 u_t &= u_{xx} - u \quad (0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty) \\
 \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases} & \quad (0 < t < \infty) \\
 u(x, 0) &= \sin(\pi x) + 0.5 \sin(3\pi x)
 \end{aligned}$$

は上記の技法を使って以下のようにして解ける：

(a) とりあえず項 $-u$ を無視する

(b) $-u$ の項がない初期値・境界値問題を解いて

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) + 0.5 e^{-(3\pi)^2 t} \sin(3\pi x)$$

を得る

(c) この解に因子 $e^{-\beta t} = e^{-t}$ を掛けて解

$$u(x, t) = e^{-t} [e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) + 0.5 e^{-(3\pi)^2 t} \sin(3\pi x)]$$

を得る

2. 拡散・対流方程式

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - v u_x$$

(v は定数) も

$$w_t = \alpha^2 w_{xx}$$

という形に変換できる。この場合の変換は

$$u(x, t) = e^{v[x - (vt/2)] / (2\alpha^2)} w(x, t)$$

である。この変換の本質は、媒質の動きによる部分（指数関数の因子）を解からくり出すというところである。指数関数の因子は速度 $v/2$ での右方への動きを表す項 $x - vt/2$ の指数関数から成っていることに注意せよ。以下の練習問題の中で、この変換を利用する機会があるであろう。

練習問題

1. 拡散問題

$$\text{偏微分方程式} \quad u_t = u_{xx} - u_x \quad (0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty)$$

$$\text{境界条件} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

$$\text{初期条件} \quad u(x, 0) = e^{x/2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を、より易しい問題に変換して、解け。解はどんな形をしているか。この問題は、(左から右へ速度 $v=1$ で) 動いている媒質の中の物質濃度 $u(x, t)$ の変化を表しているとして解釈できる。ここで、媒質の端における濃度は(濾過器等により) 零に保たれ、初期濃度は $e^{x/2}$ である。求めた解はこの解釈とうまく合っているか。

2. 問題

偏微分方程式 $u_t = u_{xx} - u + x$ ($0 < x < 1, 0 < t < \infty$)

境界条件 $\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 1 \end{cases}$ ($0 < t < \infty$)

初期条件 $u(x, 0) = 0$ ($0 \leq x \leq 1$)

を次の方法で解け：

- (a) 非同次境界条件を同次境界条件に変換する
- (b) 項 $-u$ を含まない新しい方程式に変換する
- (c) その結果得られる問題を解く

3. 偏微分方程式 $u_t = u_{xx} - u$ ($0 < x < 1, 0 < t < \infty$)

境界条件 $\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases}$ ($0 < t < \infty$)

初期条件 $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ ($0 \leq x \leq 1$)

をあらかじめ変換しないで直接変数分離によって解け。こうして得られる解が、あらかじめ変換

$$u(x, t) = e^{-t} w(x, t)$$

を行ったときに得られる解と一致するか。

参考書

W. F. Ames, *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*, Academic Press, 1965. この本は多くの型の変換について述べている。その中には、非線形問題を線形問題に変える変換さえある。

第9課 非同次偏微分方程式の解法 (固有関数展開)

目的： 初期値・境界値問題

$$\text{偏微分方程式 } u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (0 < x < 1, 0 < t < \infty)$$

$$\text{境界条件 } \begin{cases} \alpha_1 u_x(0, t) + \beta_1 u(0, t) = 0 \\ \alpha_2 u_x(1, t) + \beta_2 u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

$$\text{初期条件 } u(x, 0) = \phi(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

の解き方を示すこと。非同次偏微分方程式は、随伴同次問題

$$\text{偏微分方程式 } u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad (0 < x < 1, 0 < t < \infty)$$

$$\text{境界条件 } \begin{cases} \alpha_1 u_x(0, t) + \beta_1 u(0, t) = 0 \\ \alpha_2 u_x(1, t) + \beta_2 u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

$$\text{初期条件 } u(x, 0) = \phi(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

の解として得られる固有関数を $X_n(x)$ とし、ある一連の常微分方程式を解いて求まる関数を $T_n(t)$ として、

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

という形の級数解を見いだすことにより解くことができる。

第6課では、非同次境界条件を同次境界条件に変換する方法の話をした。しかし、具合の悪いことに、その変換の際、偏微分方程式の非同次項はそのまま残っていたので、そのような変換をした結果、われわれには

$$\text{偏微分方程式 } u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (0 < x < 1, 0 < t < \infty)$$

$$(9.1) \quad \text{境界条件 } \begin{cases} \alpha_1 u_x(0, t) + \beta_1 u(0, t) = 0 \\ \alpha_2 u_x(1, t) + \beta_2 u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

$$\text{初期条件 } u(x, 0) = \phi(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

という問題が残された。この課の目的は、固有関数展開法と呼ばれている方法でこの問題を解くことである。この方法は常微分方程式のパラメータ変化法と類似の方法である。

考え方は全く単純である。 $f(x, t) = 0$ のときの (9.1) (いわゆる随伴同次問題) の解は、Sturm-Liouville 問題

$$(9.2) \quad \begin{aligned} X'' + \lambda^2 X &= 0 \\ \alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) &= 0 \\ \alpha_2 X'(1) + \beta_2 X(1) &= 0 \end{aligned}$$

の固有関数を $X_n(x)$ として、

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n \alpha)^2 t} X_n(x)$$

で与えられるから、非同次問題 (9.1) の解がもう少し一般的な形

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

で書けるのではないかと調べてみよう。このような推測をするには物理的にもっともな理由がある。なぜならば、問題における熱源が初期条件の温度だけであったときに減衰因子

$$e^{-(\lambda_n \alpha)^2 t}$$

があったのであるから、棒の内部に熱源 $f(x, t)$ があれば初期時点以外にも新しい時間成分が現れてもよさそうである。

固有関数展開法による解

非同次問題

$$(9.3) \quad \begin{aligned} \text{偏微分方程式} \quad u_t &= \alpha^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (0 < x < 1, 0 < t < \infty) \\ \text{境界条件} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases} & \quad (0 < t < \infty) \\ \text{初期条件} \quad u(x, 0) &= \phi(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \end{aligned}$$

を考えよう。この問題を解くための手順を次のようなステップに分けよう。

〈ステップ 1〉 この方法の基本的な考え方は、熱源 $f(x, t)$ を簡単な成分に分解し：

$$f(x, t) = f_1(t) X_1(x) + f_2(t) X_2(x) + \cdots + f_n(t) X_n(x) + \cdots,$$

そのそれぞれの成分 $f_n(t) X_n(x)$ に対する応答 $u_n(x, t)$ を求めることである。

そうすればわれわれの問題に対する解は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

と書ける. $f(x, t)$ をどうやって成分 $f_n(t)X_n(x)$ に分解するかが主な問題の一つである. この問題における $X_n(x)$ という因子は, (9.3) の随伴同次問題

$$(9.4) \quad \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} & (\text{ここでは } f(x, t) = 0 \text{ であることに注意せよ}) \\ u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases}$$

を変数分離で解いたときに得られる Sturm-Liouville 系の固有ベクトル (固有関数) にとればよいことがわかるであろう. 今の場合, 変数分離により得られる Sturm-Liouville 問題は

$$\begin{aligned} X'' + \lambda^2 X &= 0 \\ X(0) &= 0 \\ X(1) &= 0 \end{aligned}$$

であるから, $X_n(x)$ は

$$X_n(x) = \sin(n\pi x) \quad (n=1, 2, \dots)$$

である. したがって, 熱源 $f(x, t)$ の分解は

$$(9.5) \quad f(x, t) = f_1(t) \sin(\pi x) + f_2(t) \sin(2\pi x) + \dots + f_n(t) \sin(n\pi x) + \dots$$

という形をとる.

関数 $f_n(t)$ を求めるには, この式の両辺に $\sin(m\pi x)$ を掛けて 0 から 1 までは (x に関して) 積分すればよい. すなわち,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, t) \sin(m\pi x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) dx \\ &= \frac{1}{2} f_m(t) \end{aligned}$$

あるいは (m を n に変えて)

$$(9.6) \quad f_n(t) = 2 \int_0^1 f(x, t) \sin(n\pi x) dx$$

である. これが係数 $f_n(t)$ を熱源 $f(x, t)$ で表す式である.

〈ステップ 2〉 (入力 $f_n(t)X_n(x)$ に対する応答 $u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x)$ を求める)

熱源の式 $f(x, t)$ を

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(n\pi x)$$

のように分解したもので置き換え、個々の成分に対する応答

$$u_n(x, t) = T_n(t) \sin(n\pi x)$$

を求めよう。すなわち、関数 $T_n(t)$ を探す。これがわかればわれわれの問題の答えは

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi x)$$

と書ける。 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi x)$ を式

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(n\pi x)$$

$$u(0, t) = 0$$

$$u(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = \phi(x)$$

に代入すると

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \sin(n\pi x) &= -\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^2 T_n(t) \sin(n\pi x) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(n\pi x) \end{aligned}$$

$$(9.7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin 0 = 0 \quad (0=0 \text{ であるから恒等式で、何の条件にもならない})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi) = 0 \quad (0=0 \text{ であるから恒等式で、何の条件にもならない})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin(n\pi x) = \phi(x)$$

が得られる。偏微分方程式と初期条件を書き変えると、

$$\text{偏微分方程式} \quad \sum_{n=1}^{\infty} [T_n' + (n\pi\alpha)^2 T_n - f_n(t)] \sin(n\pi x) = 0$$

$$\text{初期条件} \quad \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin(n\pi x) = \phi(x)$$

となるので、 $T_n(t)$ は簡単な初期値問題

$$\begin{aligned}
 (9.8) \quad & T_n' + (n\pi\alpha)^2 T_n = f_n(t) \\
 & T_n(0) = 2 \int_0^1 \phi(\xi) \sin(n\pi\xi) d\xi = a_n
 \end{aligned}$$

を満足する解であることが容易にわかる。これらの常微分方程式は簡単に解けるものの一つであり（積分因子を使う），解は

$$(9.9) \quad T_n(t) = a_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} + \int_0^t e^{-(n\pi\alpha)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau$$

である。したがって，問題 (9.3) の解は

$$\begin{aligned}
 (9.10) \quad u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi x) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} [a_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x)] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x) \int_0^t e^{-(n\pi\alpha)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right]
 \end{aligned}$$

$\nearrow$
 過渡成分

$\nwarrow$
 定常状態

（初期条件の影響を表す項）

（右辺の $f(x, t)$ の影響を表す項）

となる。この解の形から，温度応答は二つの成分によることがわかる。すなわち，第1の成分は初期条件によるもので第2の成分は熱源 $f(x, t)$ によるものである。“定常”という言葉は第2の成分の呼び名としてはあまり適当ではない。なぜならば，その成分は必ずしも静止状態になるわけではないからである（ $f(x, t)$ が t に関して周期的であればこれは周期的な定常状態に近づく）。

これでこの問題は終わりであるが，最後にこの方法の具体的な適用例を示そう。

固有関数展開法による問題の解

簡単な問題

$$\begin{aligned}
 (9.11) \quad & \text{偏微分方程式} \quad u_t = \alpha^2 u_{xx} + \sin(3\pi x) \quad (0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty) \\
 & \text{境界条件} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (0 < t < \infty) \\
 & \text{初期条件} \quad u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad (0 \leq x \leq 1)
 \end{aligned}$$

を考えよう。われわれの目標は展開式

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi x)$$

における係数 $T_n(t)$ を計算することである（この問題の固有関数 $X_n(x)$ も前

と同じである). この展開式を問題の式に代入すると, 関数 $T_n(t)$ についての常微分方程式, すなわち

$$T_n' + (n\pi\alpha)^2 T_n = f_n(t) = 2 \int_0^1 \sin(3\pi x) \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} 1 & n=3 \\ 0 & n \neq 3 \end{cases}$$

$$T_n(0) = 2 \int_0^1 \sin(\pi\xi) \sin(n\pi\xi) d\xi = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

が得られる. この式を $n=1, 2, \dots$ について書き下し, 解くと,

$$(n=1) \quad \left. \begin{array}{l} T_1' + (\pi\alpha)^2 T_1 = 0 \\ T_1(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow T_1(t) = e^{-(\pi\alpha)^2 t}$$

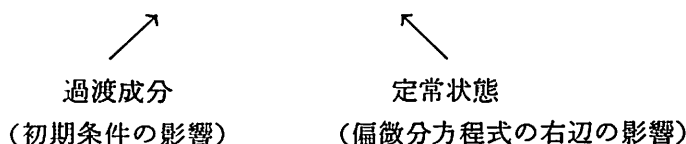
$$(n=2) \quad \left. \begin{array}{l} T_2' + (2\pi\alpha)^2 T_2 = 0 \\ T_2(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow T_2(t) = 0$$

$$(n=3) \quad \left. \begin{array}{l} T_3' + (3\pi\alpha)^2 T_3 = 1 \\ T_3(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow T_3(t) = \frac{1}{(3\pi\alpha)^2} (1 - e^{-(3\pi\alpha)^2 t})$$

$$(n \geq 4) \quad \left. \begin{array}{l} T_n' + (n\pi\alpha)^2 T_n = 0 \\ T_n(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow T_n(t) = 0$$

となる. したがって問題の解は

$$(9.12) \quad u(x, t) = e^{-(\pi\alpha)^2 t} \sin(\pi x) + \frac{1}{(3\pi\alpha)^2} (1 - e^{-(3\pi\alpha)^2 t}) \sin(3\pi x)$$



である.

注意

1. 固有関数展開法は非同次偏微分方程式を解く最も強力な方法の一つである. 後で積分変換を学ぶ際に, 非同次偏微分方程式を解くにはまだ別の方法もあることがわかるであろう.
2. 展開式の中の固有関数 $X_n(x)$ は偏微分方程式と境界条件によるので, 問題ごとに異なる. 読者はこの課の練習問題4を見て, 固有関数 $X_n(x)$ の求め方が修得できていることを確かめられたい.
3. 常微分方程式論で

$$P_n(x)e^{ax} \begin{cases} \sin(\beta x) \\ \cos(\beta x) \end{cases}$$

というような非同次項をもつ線形方程式の解が未定係数法で求められたということを思い出してほしい。問題(9.11)はこの方法でも解ける。この方法に興味をもつ読者はこの課の終わりに挙げてある参考書を見てほしい。

練習問題

1. 問題

$$\text{偏微分方程式 } u_t = u_{xx} + \sin(3\pi x) \quad (0 < x < 1, 0 < t < \infty)$$

$$\text{境界条件 } \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

$$\text{初期条件 } u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

の解は(9.12)で与えられる。この解は直観と一致するか。この解はどんな形をしているか。

2. 問題

$$\text{偏微分方程式 } u_t = u_{xx} + \sin(\pi x) + \sin(2\pi x) \quad (0 < x < 1, 0 < t < \infty)$$

$$\text{境界条件 } \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

$$\text{初期条件 } u(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を解け。

3. 問題

$$\text{偏微分方程式 } u_t = u_{xx} + \sin(\pi x) \quad (0 < x < 1, 0 < t < \infty)$$

$$\text{境界条件 } \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

$$\text{初期条件 } u(x, 0) = 1 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を固有関数展開法で解け。

$$4. \quad \text{偏微分方程式 } u_t = u_{xx} + \sin(\lambda_1 x) \quad (0 < x < 1, 0 < t < \infty)$$

$$\text{境界条件 } \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u_x(1, t) + u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

$$\text{初期条件 } u(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

の解を固有関数展開法で求めよ。ただし、 λ_1 は $\tan \lambda = -\lambda$ の第1の解である。この問題の固有関数 $X_n(x)$ は何か。

5. 問題

$$\text{偏微分方程式 } u_t = u_{xx} \quad (0 < x < 1, 0 < t < \infty)$$

$$\text{境界条件} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = \cos t \end{cases} \quad (0 < t < \infty)$$

$$\text{初期条件} \quad u(x, 0) = x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を次の方法で解け：

- (a) まず、境界条件が零であるような問題に変換する
- (b) その結果得られる問題を固有関数で展開することにより解く

参考書

P. W. Berg, J. L. McGregor, *Elementary Partial Differential Equations*, Holden-Day, 1966. 広く読まれている偏微分方程式の教科書の一つである。程度は本書より少々高く、きちんと書かれている。非同次問題をたくさん扱った節がある。

定価(本体 5200 円 + 税)

ISBN4-254-11071-5 C3041 ¥5200E

