

2017年度  
ゼミ輪講テキスト

2017年4月14日

# 目次

<b>第 6 章</b>	<b>熱伝導と波動の数理</b>	<b>3</b>
6.1	はじめに	3
6.2	フーリエ級数とフーリエ係数	4
6.3	フーリエ展開可能性の問題	9
6.4	針金の熱伝導	14
6.5	弦の振動	18
6.6	弦を伝わる波動	20
6.7	複素フーリエ級数	22
6.8	補足 I; 不等式 (6.33) の証明	23
6.9	補足 II; 基礎の区間の長さの変更	24
<b>第 7 章</b>	<b>発展系の数値解析</b>	<b>26</b>
7.1	コンピューター・シミュレーションの意義	26
7.2	差分近似	27
7.3	熱方程式の陽的差分法による解法	28
7.4	数値実験例	30
	(1) 解析解との比較	30
	(2) 解の漸近挙動	30
	(3) 熱伝導方程式の平滑化作用、 $t \rightarrow \infty$ の際の漸近形	33
7.5	陰解法	35
	(1) 安定性	35
	(2) 後退 Euler 法	36
	(3) $\theta$ 法, クランク-ニコルソン法	36
7.6	熱伝導方程式以外の問題	38
7.7	補足	39
	(1) ランダウ (Landau) の記号 $O(\cdot)$ , $o(\cdot)$ について	39
	(2) 対数グラフの読み方	40
	(3) 熱伝導方程式の解の指数関数的減衰	40
	(4) 連立 1 次方程式 (7.46) が解けること	42
	(5) 差分解の厳密解への収束の証明	43
	(6) ガウス (Gauss) の消去法のアルゴリズム	46
7.8	おまけ: 差分法をこの後学ぶために	47

# 序

この文書は、藤田宏「三訂版 応用数学」放送大学出版協会 (1999) という書籍の第 6 章、第 7 章を抜き出したものに加筆・修正したものです。

## 「応用数学」について

著者の藤田宏先生の略歴は、「応用数学」の巻末にも載っていますが、筆者 (桂田) の学生時代 (学部～博士課程) の指導教官であり、また明治大学数学科創設以来 10 年間にわたって教鞭を取られた方です。

「応用数学」は放送大学において、藤田先生が 1992 年から十数年担当された講義科目の教科書です。先生の数学観に基づいたユニークな内容になっていて、なかなか評判が良かったようです。

7 章だけ (お前やれ、ということ) 桂田が分担執筆しました。

## この文書の内容

ここにピックアップした「応用数学」の 2 つの章の内容は、6 章が (1) Fourier 級数, (2) 熱方程式と波動方程式、7 章が熱方程式に対する差分法です。

(他の章が見たい人のために

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/members/pdf/Fujita-Katsurada/>

を用意しておきます。)

桂田研で主要な研究テーマは、数値計算法の数理ですが、(1), (2), (3) は必須の教養であり、ゼミで学ぶものとしては適当な選択肢の一つであると考えています。

6 章については、桂田が輪講用の色々な注をつけてあります (恐れ多いのですが…)

7 章については、若干の加筆修正を行っています (出版されたテキストとは、数パーセントの相違があります)。

## 現象数理学科学生向けの勉強案内

Fourier 級数の初歩については、「数学とメディア」, 「画像処理とフーリエ変換」で学んでいる人が多いと想定しています。そういう人にとっては復習になります。

熱方程式、波動方程式などの偏微分方程式や、差分法については、この文書自身が良い入門になると思います。

偏微分方程式に対するもう少し詳しく目の資料として、桂田 [1] をあげておきます。

# 第6章 熱伝導と波動の数理

## 6.1 はじめに

この章では、熱の伝わり方や波動・振動の現象を対象として、フーリエ級数の基礎と応用を学習する。このフーリエ級数にその名を冠している J. B. フーリエ (Jean-Baptiste-Joseph Fourier 1768-1830) はフランスの数学者であり物理学者であった。

熱は温度の高いほうから低いほうへと伝わるが、フーリエは、まず、伝わり方を定量的に示す、

“熱流は温度の勾配（傾き）に比例する”

というフーリエの法則を見つけた。

この法則から熱の流れを支配する方程式、いわゆる、熱伝導の方程式（熱方程式ともいう）が導かれる。これを1次元の媒質、たとえば、一様な針金の熱伝導の場合に書けば

$$(6.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となる。

ここに、 $x$  は針金の点の座標であり、 $u = u(t, x)$  は時刻  $t$  における点  $x$  での温度である。また、 $\kappa$  は針金の熱伝導係数と単位長さあたりの比熱から定まる正定数である。



図 6-1

フーリエは熱伝導の解析にあたり、もう一つの重要な発見をした。それは、たとえば、 $x$  の区間  $I = [-\pi, +\pi]$  で定義された“任意の関数”  $f = f(x)$  は、無数の係数  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を然るべく選ぶことにより

$$(6.2) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

の形に表されるという事実である。(6.2) の右辺の級数を関数  $f$  のフーリエ級数とよぶ<sup>1</sup>。

フーリエ級数は熱伝導以外にも多くの応用があり、現在も数理解析の主要な方法として活用されている。この章でも針金の熱伝導の解析に加えて、弦の振動の問題における波動方程式に対してフーリエ級数を応用する。

また、理論的にいろいろな関数についての (6.2) の収束の吟味は、“任意の関数”を相手とする厳密な解析学の進歩への大きな刺激となった。

この章ではフーリエ級数の基本事項のあらまし、および上記の応用について学ぶ。

<sup>1</sup>桂田注: 「フーリエ級数の定義を述べよ」というような問に答えられるようになってもらいたい、ここに書いてあることは定義とは言いにくい。後の (6.15) の直後に書いてあることを定義と考えよう。

## 6.2 フーリエ級数とフーリエ係数

任意の関数を表示するのに規準となる関数列  $\{\phi_n\}$  を定めておき、これらの関数の線形結合

$$(6.3) \quad c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3 + \cdots + c_n\phi_n$$

および、その極限、すなわち無限級数

$$(6.4) \quad c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3 + \cdots + c_n\phi_n + \cdots$$

を用いることが多い。この級数を関数列  $\{\phi_n\}$  による展開という。  $c_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) は展開の係数である。

たとえば、  $\phi_n = x^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) のときは、(6.3) は多項式であり、(6.4) はべき級数である。 $f(x)$  が(6.4) で表されること、すなわち、

$$(6.5) \quad f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_nx^n + \cdots$$

は、  $f(x)$  のテイラー展開（マクローリン展開）に他ならない。

この場合の係数は

$$(6.6) \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

であることは微分法で学んでいる。

テイラー展開では

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad (-1 < x < 1)$$

のように、展開が成立する  $x$  の範囲が制限されることがあるが、しかし、展開が成立する範囲内では項別微分が許される。

すなわち、(6.5) がある区間<sup>2</sup>で成り立つとすれば、その区間では

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots + nc_nx^{n-1} + \cdots$$

が成り立つ。このことからテイラー展開が可能な関数はいくらでも微分できる滑らかな関数に限られること、したがって、不連続な関数やグラフが角をもつような関数はテイラー展開できないことがわかる。

さて、フーリエ級数では展開の基礎となる関数列として

$$(6.7) \quad \text{余弦関数の列 } \{\cos nx; n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

および

$$(6.8) \quad \text{正弦関数の列 } \{\sin nx; n = 1, 2, 3, \dots\}$$

を併せて用いる。

いま、上の正弦、余弦の列を用いての関数  $f(x)$  の(6.2)の形の展開、すなわち、フーリエ展開<sup>3</sup>が可能であったと仮定する；

$$(6.2) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

<sup>2</sup>桂田注: 厳密には「開区間」とすべきことを理解しよう。

<sup>3</sup>桂田注: ある意味で「展開の一意性」が成立するので、結局はフーリエ展開になってしまうわけだが、ここに書いてあることをフーリエ展開の定義とは考えない方がよい。

ここで係数  $a_n, b_n$  は関数  $f(x)$  のフーリエ係数<sup>4</sup>とよばれる。

(6.2) の右辺は周期  $2\pi$  をもっている。したがって、関数  $f(x)$  も周期  $2\pi$  をもつと考えるべきである。もし、最初に与えられた関数が区間  $I = [-\pi, +\pi)$  で定義されているならば、 $f(x)$  を周期  $2\pi$  で周期的に延長した関数を改めて  $f(x)$  とみなせばよい。

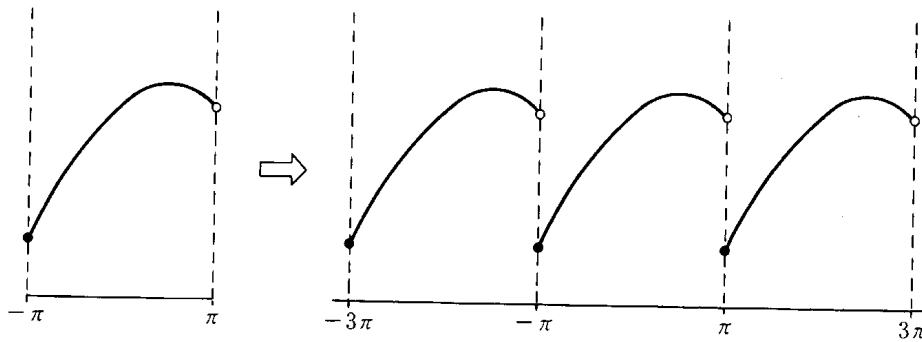


図 6-2

テイラー展開の係数  $c_n$  は (6.6) で与えられるのであった。フーリエ係数の場合はどうであろうか。

いま、周期  $2\pi$  の連続関数  $f(x)$  に対して (6.2) が成り立ち、かつ、右辺の級数が一様収束しているものと仮定する。そうすると、右辺の級数に関して項別積分が可能である。級数に有界な関数をかけてからでも同じことが許される<sup>5</sup>。

そこで、自然数  $m$  を固定し、 $\cos mx$  を (6.2) の両辺にかけてから  $-\pi$  から  $\pi$  まで積分しよう。項別積分が可能であるので

$$(6.9) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx$$

である。ところが、自然数  $m, n$  が異なるとき、正弦、余弦関数の直交性とよばれる次の関係が知られている。

$$(6.10) \quad \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0 \quad (\text{これは } m = n \text{ でもよい。}) \end{cases}$$

(6.10) を確かめることは、たとえば、最初のものについては

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} \{ \cos(m+n)x + \cos(m-n)x \}$$

といった三角関数の公式と正弦関数の周期性に基づく等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = \left[ \frac{\sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (k \text{ は } 0 \text{ でない整数})$$

を用いて計算すればすぐにできる。

さて、直交性 (6.10) を用いると、(6.9) から

$$(6.11) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx$$

<sup>4</sup>桂田注: これも「フーリエ係数」の定義とは考えない方がよい。

<sup>5</sup>桂田注: ゼミではこのような主張には、証明を用意しておく必要がある。

となる。ところが,

$$(6.12) \quad \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2mx + 1) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin 2mx}{2m} + x \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

であるから

$$(6.13) \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx$$

が得られる。同様に  $m$  を自然数とするとき

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx$$

が得られる。

$a_0$  だけは (6.2) を項別積分して得られる等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi a_0$$

から

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 0x \, dx$$

となり, (6.13) で形式的に  $m = 0$  とした場合に合わない。そこで,  $2a_0$  を改めて  $a_0$  とおく。さらに  $m$  の代わりに  $n$  と書くことにすると, 関数  $f(x)$  のフーリエ係数を計算する公式

$$(6.14) \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

が得られる。この係数を用いたものが  $f(x)$  のフーリエ級数であるが,  $a_0$  をとり直したので, その形は (6.2) 式とは定数項だけが異なり,

$$(6.15) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

となる。今後は, (6.14) の係数を用いた (6.15) の右辺を  $f(x)$  のフーリエ級数とよぶ。

桂田突っ込み: Fourier 級数の定義が書けますか? —————

「Fourier 級数の定義」を通常の数学の講義で行なわれる形で書いてみよう。  $f$  の Fourier 級数と  $f$  を明確に区別できるようにしてほしい。

桂田コメント: 明記されていない定理 —————

上では, 定理とは書いていないけれど, ある命題が証明できていることに気付くだろうか? 以下, それを定理 0 と呼ぶことにしよう。

宿題: 定理 0 を書け。

なお, (6.14) から次のことがわかる。もし  $f(x)$  が偶関数 (奇関数) ならば  $b_n = 0$  ( $a_n = 0$ ) となり, そのフーリエ級数には余弦 (正弦) の項だけが登場する。

例 1. グラフが折れ線であるような関数の例を扱ってみよう。すなわち、

$$(6.16) \quad f(x) = \pi - |x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

について考える。

この  $f(x)$  を周期  $2\pi$  で延長したものを、やはり  $f(x)$  で表そう。(6.14) に従って  $f(x)$  のフーリエ係数を求める。まず、 $f(x)$  が偶関数で

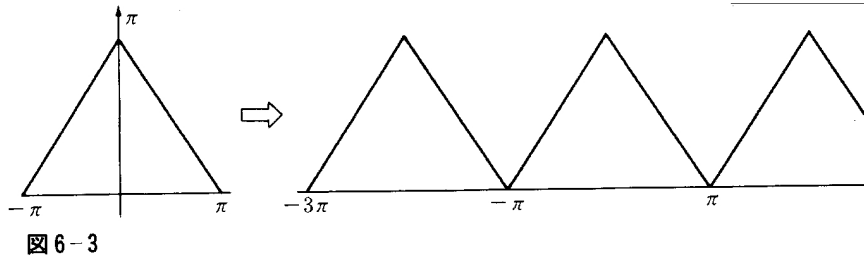


図 6-3

あるから  $b_n \equiv 0$  である。 $a_n$  の計算は次のようになる；

$n \neq 0$  ならば

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 2 \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos nx \, dx \\ &= 2 \left[ (\pi - x) \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} \, dx \\ &= \frac{2}{n^2} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4}{n^2} & (n = \text{奇数}), \\ 0 & (n = \text{偶数}). \end{cases} \end{aligned}$$

また、

$$\pi a_0 = 2 \int_0^{\pi} (\pi - x) \, dx = \pi^2.$$

したがって、 $f(x)$  のフーリエ級数は

$$(6.17) \quad f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots \right\}$$

である<sup>6</sup>。

ここで、 $|\cos nx| \leq 1$  であるから (6.17) の右辺の級数の優級数として、

$$\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \right\}$$

を採用することができるが、この優級数は確かに収束する。よって、級数の一様収束に関するワイヤストラス (K.T.W. Weierstrass, 1815-97) の定理により (6.17) は一様収束し、上で行った項別積分が正当化される<sup>7</sup>。

<sup>6</sup>桂田注: 実は、この段階では  $f$  がその Fourier 級数に等しいかどうかは分からない。要するに等式 (6.17) が成り立つことは証明できていない。

<sup>7</sup>桂田注: ここに書いてあることは藤田先生の勘違いだと思う。テキストを批判的に読むことがゼミでの仕事なので、判断は読者に任せる。



例 2. 次に簡単な階段関数の例を扱う<sup>8</sup>。すなわち、 $-\pi < x \leq \pi$  の範囲では

$$(6.18) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < \pi) \\ 0 & (x = 0, \pi) \\ -1 & (-\pi < x < 0) \end{cases}$$

で表され、周期  $2\pi$  をもつ関数  $f$  のフーリエ展開を導いてみよう。下の関数のグラフからもわかるように  $f$  は奇関数である。したがって、

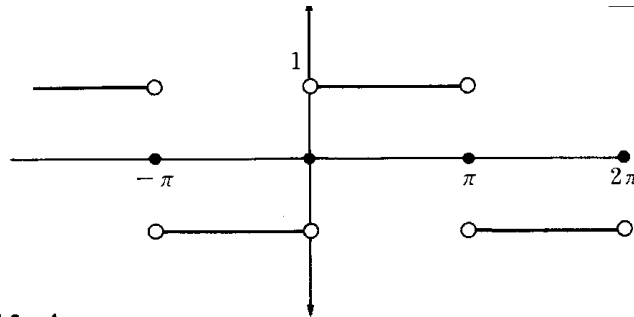


図 6-4

そのフーリエ級数には正弦項のみが現れ、

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

と書けるはずである。係数  $b_n$  を (6.14) にしたがって計算すれば

$$(6.19) \quad \begin{aligned} \pi b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = 2 \left[ -\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \\ &= 2 \times \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} = \begin{cases} \frac{4}{n} & (n = \text{奇数}) \\ 0 & (n = \text{偶数}) \end{cases} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、求める  $f$  のフーリエ展開は

$$(6.20) \quad f(x) = \frac{4}{\pi} \left\{ \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + \dots \right\}$$

であることがわかる。次の節で紹介する定理 3 によれば、(6.20) の右辺はすべての  $x$  に対して収束する。一般論からは  $f(x)$  の不連続点では  $f(x)$  と一致しない可能性がある。しかし、今の  $f(x)$  は、たとえば、 $x = 0$  で不連続であるけれども、ちょうど

$$f(0) = \frac{f(+0) + f(-0)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$$

が成り立っているので<sup>9</sup>、次節の定理 3 の主張と合致して (6.20) の右辺は  $x = 0$  でも  $f(x)$  と一致するのである。もし、 $x = n\pi$  ( $n$  は整数) における値を 0 以外に変更したとすると、その場合でも (6.19)

<sup>8</sup>桂田注: 例 2 の  $f$  は例 1 の  $f$  の導関数 (の符号を変えたもの) と言える。その Fourier 級数はどういう関係になっているか? 考えてみてください。

<sup>9</sup>桂田の趣味としては、

$$\frac{f(+0) + f(-0)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0 = f(0)$$

と書くところ。

から計算される  $b_n$  の値に変わりはない。積分範囲の有限個の点で被積分関数の値を変更しても定積分の値に変わりはないからである。したがって、(6.20) の右辺のフーリエ級数には変わりがない。この正弦関数のみからなるフーリエ級数の和が  $x = n\pi$  で 0 となることは明らかである。

したがって、 $x = n\pi$  における  $f$  の関数値だけを変更すると、そこでは、 $f(x)$  の値とフーリエ級数の和とはくいちがうことになる。

### 6.3 フーリエ展開可能性の問題

前節ではフーリエ級数が収束してその和が  $f(x)$  となること、すなわち、 $f(x)$  のフーリエ展開が可能であることを仮定した上で、フーリエ係数を計算する公式 (6.14) を導いた。

逆に (6.14) でフーリエ係数を定めたとき、(6.15) のフーリエ級数は本当に  $f(x)$  に収束するのだろうか。これは深遠な数学的問題である。大ざっぱに言えば、応用に登場するような関数について結果は肯定的である。

この点に関する数学的な定理として、次の諸定理がある。

【定理 1】  $f$  が周期  $2\pi$  をもち、連続であり、そのフーリエ級数が一様収束すればフーリエ級数の和は  $f(x)$  である。

【定理 2】  $f$  が周期  $2\pi$  をもち、 $f$  および  $f'$  が連続ならば、フーリエ級数の和は  $f(x)$  である<sup>10</sup>。

【定理 3】  $f(x)$  が周期  $2\pi$  をもち、区分的に連続かつ滑らかならば、 $f(x)$  のフーリエ級数は、 $f(x)$  の連続点  $x_0$  では  $f(x_0)$  に、 $f(x)$  の不連続点  $x_0$  では左右の極限値の平均、すなわち、

$$(6.21) \quad \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$$

に収束する。

定理 3 における、“区分的に連続かつ滑らか”，とは、考えている区間を有限個の分点で小区間に適当に分割すれば、小区間においては  $f$  も  $f'$  も連続であり、かつ、 $f$  および  $f'$  の分点の左右からの極限値が存在することである。

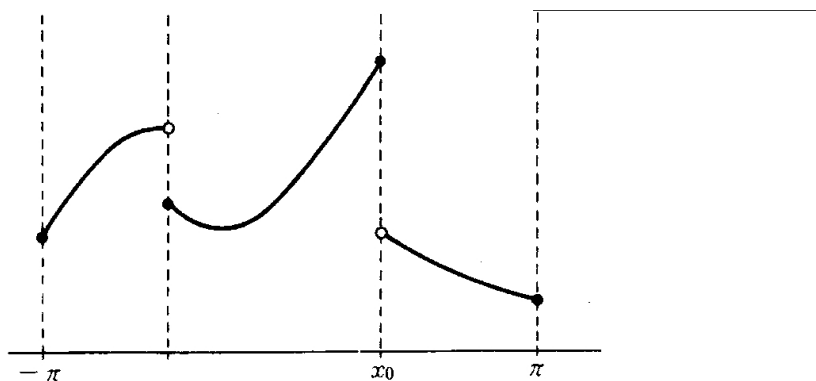


図 6-5

さらに、数学的に明快な結果としては次の定理が一番であろう。

【定理 4】  $f(x)$  が区間  $(-\pi, \pi)$  において 2 乗可積分であるとき、すなわち、

$$(6.22) \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

<sup>10</sup>桂田注: 定理 1 を使えば、定理 2 の証明はそれほど大変ではない (自分で思いつくのは大変だが...)。つまり藤田先生は (有名な) 定理 2 の中核部分を定理 1 として抜き出して、その証明を書いていたわけである。数学の非専門家向けのテキストとしてはかなり欲張っているところだと思う。

ならば、 $f(x)$  のフーリエ級数の部分和

$$(6.23) \quad S_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

は、2乗平均収束の意味で  $f$  に収束する。すなわち

$$(6.24) \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

が成り立つ。

注. 数学的にさらに進んだ結果は、1966年に L. カールソン (Carleson) によって得られた。それによると、 $f$  がルベック積分の意味で可測で2乗可積分ならば、そのフーリエ級数はほとんど到るところ  $f(x)$  に収束する。

上に記した定理1~4の証明は、結構手間がかかる。応用を急ぐ読者は定理の意味を理解されるだけで十分であろう。

以下では理論に興味のある読者の学習の材料として、定理1の証明を記しておく<sup>11</sup>。

【定理1の証明】フーリエ級数の一様収束が仮定されているから、(6.15)右辺の

$$(6.25) \quad S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

は連続関数を表す。目標は  $f(x) \equiv S(x)$  を示すことである。

$$w(x) = f(x) - S(x)$$

とおく。

これから先、周期  $2\pi$  の二つの（実数値）関数  $u, v$  に対して、

$$(6.26) \quad (u, v) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x) dx$$

により定義される内積  $(u, v)$  を用いることにする。正弦、余弦関数の直交性およびフーリエ係数の公式(6.14)を思い出すと

$$\begin{aligned} (w, \cos kx) &= (f, \cos kx) - (S, \cos kx) \\ &= \pi a_k - a_k \pi = 0 \\ (w, \sin kx) &= (f, \sin kx) - (S, \sin kx) \\ &= \pi b_k - b_k \pi = 0 \end{aligned}$$

が得られる<sup>12</sup>。すなわち、 $w$  は正弦関数の列および余弦関数の列の任意の関数と直交している。したがって、次の補題を用いれば

$$w \equiv 0$$

が得られて定理1の証明が完成する。Q.E.D.

結局、定理1の証明の実質的部分は次の補題にある。

【補題】周期  $2\pi$  の任意の連続関数  $w$  が

$$(6.27) \quad \begin{cases} (w, \cos kx) = 0, & (k = 0, 1, 2, \dots) \\ (w, \sin kx) = 0, & (k = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

<sup>11</sup>桂田注: ここに書いてある定理1の証明は藤田先生のオリジナルなのだそうである。

<sup>12</sup>桂田注:  $(S, \cos kx) = a_k \pi$ ,  $(S, \sin kx) = b_k \pi$  は(6.11)の導出と同様に得られる。

の意味で正弦関数，余弦関数と直交するならば，実は

$$w(x) \equiv 0$$

である。

〔証明〕第1段  $n$  を任意の正の偶数として，補助関数  $\eta_n(x)$  および  $\zeta_n(x)$  を次式により導入する。

$$(6.28) \quad \eta_n(x) = \cos^n \frac{x}{2},$$

$$(6.29) \quad \zeta_n(x) = \frac{\eta_n(x)}{\int_{-\pi}^{\pi} \eta_n(t) dt}.$$

しばらく  $x$  の範囲を， $-\pi \leq x \leq \pi$  に限って考察しよう。この範囲での  $\cos \frac{x}{2}$  の値域は

$$(6.30) \quad 0 \leq \cos \frac{x}{2} \leq 1.$$

である。特に (6.30) の左の等号は区間の両端でのみ成立し，逆に右側の等号は  $x = 0$  のみで成立する。このことは  $\cos \frac{x}{2}$  の  $n$  乗である  $\eta_n$  についても同様で，

$$(6.31) \quad 0 \leq \eta_n(x) \leq 1.$$

また， $x = 0$  以外の点では， $n$  を増すにつれて  $\eta_n(x)$  の値が 0 に収束することは明らかである。

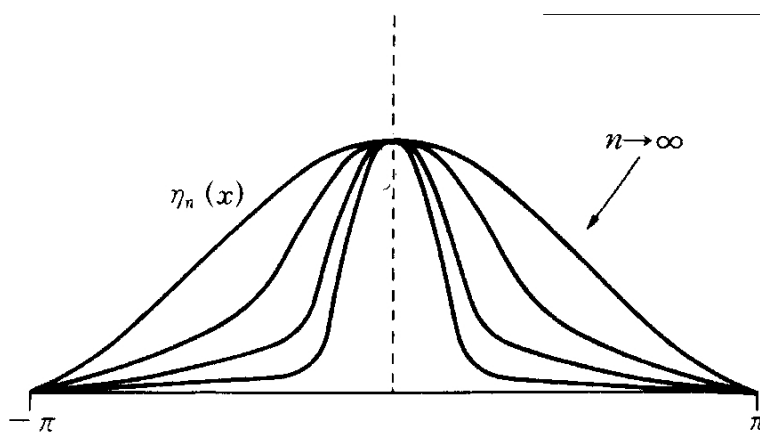


図 6-6

すなわち， $n$  の増加とともに  $\eta_n$  のグラフは両座標軸に近づく形でやせ細っていく<sup>13</sup>。このことから

$$(6.32) \quad \gamma_n = \int_{-\pi}^{\pi} \eta_n(x) dx$$

とおけば， $n \rightarrow \infty$  のとき  $\gamma_n \rightarrow 0$  となることがわかる<sup>14</sup>。一方， $\gamma_n$  を用いれば  $\zeta_n(x) = \frac{\eta_n(x)}{\gamma_n}$  である。

<sup>13</sup>桂田コメント：誰かコンピューターでグラフを描いて、テキストに載っているグラフと比べてみてくださいませんか？(お願い)

<sup>14</sup>桂田注：率直に言って、これは証明とは言いにくい。証明をしてみよう。(ヒント) Lebesgue 積分を学んでいれば一発で証明する方法がある。

したがって、特に  $\eta_n(0) = 1$  であるから、 $\gamma_n \rightarrow 0$  によって  $\zeta_n(0) \rightarrow +\infty$  である。  
 さらに、 $\gamma_n$  を詳しく調べると（章末の補足参照），ある正定数  $C$  に対し、

$$(6.33) \quad \gamma_n \geq Cn^{-1}$$

であることがわかる。これより  $x \neq 0$  ならば、

$$0 \leq \zeta_n(x) = \frac{\cos^n \frac{x}{2}}{\gamma_n} \leq C^{-1}n \cos^n \frac{x}{2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる。ただし、1 より小さい正数の  $n$  乗は  $n$  倍しても 0 に収束することをを用いた。したがって、 $\zeta_n$  のグラフも  $-\pi \leq x \leq \pi$  の範囲では、 $n \rightarrow \infty$  とともに縦軸の上半分と横軸に近づく形でやせ細っていく（次図 6-7 参照<sup>15</sup>）。

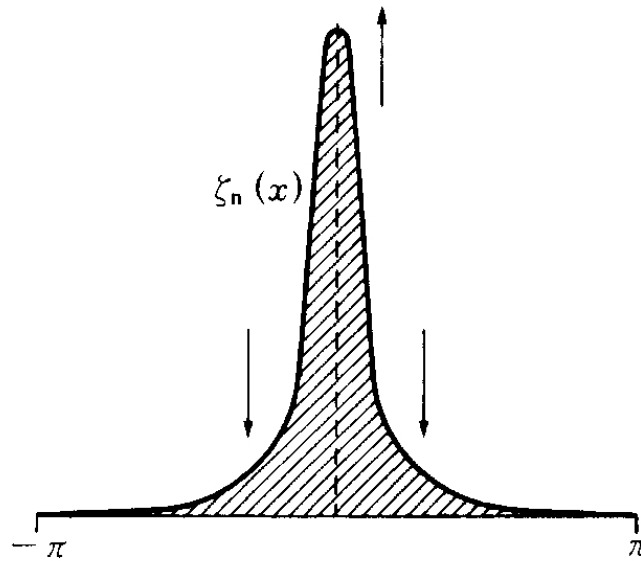


図 6-7

また、任意の  $n$  に対して

$$(6.34) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \zeta_n(x) dx = 1$$

であることは  $\zeta_n$  の定義から明らかである。

$\delta$  関数を知っている読者には、次のように述べれば理解しやすいであろう。すなわち、 $\zeta_n$  は、 $n \rightarrow +\infty$  につれて原点に特異点のある  $\delta$  関数に近づく。一方、 $\delta$  関数になじみのない読者も、直感的に次の説明を納得できるであろう。

すなわち、積分

$$(6.35) \quad J_n = \int_{-\pi}^{\pi} w(x) \zeta_n(x) dx$$

を考えると、これは  $\zeta_n(x)$  を重みとした  $w(x)$  の加重平均であること、そうして、 $n \rightarrow \infty$  とともに重み  $\zeta_n$  が原点に集中していくのだから、極限では  $J_n$  は  $w(0)$  になる。すなわち、

$$(6.36) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = w(0)$$

<sup>15</sup>桂田コメント：この図も誰かコンピューターで描き直してくれませんか？

が成り立つ。

桂田注: (6.36) の証明

このあたり、(6.36) を納得してもらうための説明が書いてあるのだが、率直に言って、証明と呼ぶには不十分であって、かえって読みづらい (輪講の当番の準備に困る) ところであろう。(6.34) に注意すると、

$$\begin{aligned} J_n - w(0) &= \int_{-\pi}^{\pi} w(x)\zeta_n(x) dx - w(0) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \zeta_n(x) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [w(x) - w(0)] \zeta_n(x) dx \end{aligned}$$

これから

$$|J_n - w(0)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |w(x) - w(0)| \zeta_n(x) dx.$$

任意の正数  $\varepsilon$  に対し、 $w$  の連続性から、十分小さな正数  $\delta$  が存在して、

$$|w(x) - w(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (|x| \leq \delta)$$

が成り立つ。ゆえに

$$\int_{|x| \leq \delta} |w(x) - w(0)| \zeta_n(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{|x| \leq \delta} \zeta_n(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \zeta_n(x) dx = \frac{\varepsilon}{2}.$$

ところで

$$\begin{aligned} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |w(x) - w(0)| \zeta_n(x) dx &\leq 2 \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |w(x)| \cdot \zeta_n(\delta) \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} dx \\ &\leq 4\pi \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |w(x)| \cdot \zeta_n(\delta) \end{aligned}$$

であり、 $\zeta_n(\delta) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) であるから、十分大きい任意の  $n$  に対して

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |w(x) - w(0)| \zeta_n(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

これから

$$|J_n - w(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

第 2 段  $n = 2m$  ( $m$  は自然数) のとき、 $\eta_n(x)$  は

$$(6.37) \quad \cos mx, \cos(m-1)x, \dots, \cos 2x, \cos x, 1$$

の線形結合であることを示す。

そのためには、 $m = 1$  の場合の

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos x + 1}{2}$$

から出発して、 $m$  に関する数学的帰納法を用いれば容易である。その際、簡単な変形

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{x}{2} \cos kx &= \frac{\cos x \cos kx + \cos kx}{2} \\ &= \frac{\cos(k+1)x + \cos(k-1)x}{4} + \frac{\cos kx}{2} \end{aligned}$$

が利用できる。

こうして  $n$  が偶数ならば,  $\eta_n(x)$ , したがって  $\zeta_n(x)$  も (6.37) の余弦関数の線形結合であり, (6.27) の第 1 式の余弦関数との直交性の仮定により,  $w(x)$  は  $\zeta_n(x)$  に直交する。よって

$$J_n \equiv 0 \quad (n = 2, 4, 6, \dots)$$

である。これと (6.36) とから

$$(6.38) \quad w(0) = 0$$

が得られる。

**第 3 段** いままでのことから, 周期  $2\pi$  の任意の連続関数  $w$  が (6.27) の第 1 式の余弦関数に関する直交条件を満足するならば (6.38) が成り立つ。ついで, 一般の点における  $w$  の値が 0 であることを示したい。

そこで,  $\alpha$  を任意の実数として

$$(6.39) \quad v(x) = w(x + \alpha)$$

とおけば,  $v$  は周期  $2\pi$  の連続関数である。さらに

$$(6.40) \quad \begin{aligned} (v, \cos kx) &= \int_{-\pi}^{\pi} w(x + \alpha) \cos kx \, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \cos k(t - \alpha) \, dt \\ &= \cos k\alpha \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \cos kt \, dt + \sin k\alpha \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \sin kt \, dt \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで, 最後の式に (6.27) の直交性を用いると

$$(v, \cos kx) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

が得られる。よって, 第 2 段で得られた結論を  $v$  に適用することにより

$$v(0) = 0$$

となる。これから (6.39) により  $w(\alpha) = v(0) = 0$  結局, 任意の  $\alpha$  に対して  $w(\alpha) \equiv 0$  が得られ補題の証明が完成した。Q.E.D.

## 6.4 針金の熱伝導

フーリエ級数を用いて熱伝導の解析をしよう。いま  $x$  軸上の区間  $[0, \pi]$  に張られた針金における温度分布  $u(t, x)$  を問題とする。ただし  $u(t, x)$  は時刻  $t$ , 点  $x$  における針金の温度である。この章の最初で触れたように,  $u$  は熱伝導の方程式

$$(6.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

に従って変化するのであった。

針金の端点を図 6-8 のように A, B で表す。針金の温度変化を論じ



図 6-8

るにはA, Bでの物理的な状況設定が必要である。もし、この両端が一定の温度、たとえば、0度に保たれているのであれば、 $u$ は境界条件

$$(6.41) \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$$

を満足することになる (ディリクレ (Dirichlet) 境界条件)。もし、端点で熱の出入りが無い状態が保たれている (断熱の状態) のであれば、フーリエの法則により、そこでは温度勾配が0であるから、境界条件

$$(6.41)' \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0$$

が成り立たねばならない (ノイマン (Neumann) 境界条件)。

ここでは、境界条件が(6.41)である場合を主として扱うことにする。さて、温度変化の考察を $t=0$ から始めるとすると、この初期時刻での温度分布を与えられたものとして出発する。すなわち、 $u$ には初期条件

$$(6.42) \quad u|_{t=0} = f(x)$$

が課せられる。ただし、 $f(x)$ は区間 $[0, \pi]$ で与えられた関数である。 $f(x)$ も境界条件(6.41)を満足していると仮定しておこう。

こうして、この針金における熱伝導の解析は、熱伝導方程式(6.1)、境界条件(6.41)、初期条件(6.42)からなる初期値境界値問題に帰着した

## 解の一意性

物理的には当然のこととみなしてもよさそうであるが、上の初期値境界値問題の解の一意性、すなわち、与えられた $f$ に対して解は一つしかないことを数学的に証明してみよう。

そのために、同じ $f$ に対して(6.1), (6.41), (6.42)の初期値境界値問題に二つの解 $u_1, u_2$ があったとする。このとき $w = u_1 - u_2$ とおけば、 $w$ は次の(6.43)~(6.45)を満足する；

$$(6.43) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$(6.44) \quad w|_{x=0} = w|_{x=\pi} = 0$$

$$(6.45) \quad w|_{t=0} = 0.$$

ここで補助関数 $J(t)$ を

$$(6.46) \quad J(t) = \int_0^\pi w(t, x)^2 dx$$

により導入する。 $t \geq 0$ における $J$ の増減を調べるために $t$ で微分すると

$$(6.47) \quad \begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= 2 \int_0^\pi w \frac{\partial w}{\partial t} dx \\ &= 2 \int_0^\pi w \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad ((6.43) \text{ による}) \\ &= -2\kappa \int_0^\pi \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad ((6.44) \text{ を用いて部分積分}) \end{aligned}$$

よって、 $\frac{dJ}{dt} \leq 0$ であることがわかる。すなわち $J$ は $t$ の減少関数である。



したがって、

$$(6.48) \quad J(t) \leq J(0)$$

となる。ところが(6.45)により  $J(0) = 0$  であるから

$$J(t) \leq 0 \quad (t \geq 0).$$

一方、 $J$ の定義から

$$J(t) \geq 0 \quad (t \geq 0)$$

のはずである。

この両方から、結局

$$J(t) \equiv 0$$

が得られる。これからさらに  $w(t, x) \equiv 0$  が導かれ、目標とする

$$u_1 \equiv u_2$$

が得られた。

Q.E.D.

## 解の構成

初期値境界値問題(6.1), (6.41), (6.42)の解をつくっていこう。最初に、 $n$ を自然数とするとき

$$(6.49) \quad \phi_n = e^{-\kappa n^2 t} \sin nx$$

は、(6.1)および(6.41)を満足する関数であることを検証しよう。実際、 $x = 0$ で $\phi_n = 0$ となることは明らかであるが、 $n$ が自然数なので $x = \pi$ における境界条件も成り立つ。偏微分方程式(6.1)を満足することは代入によりすぐにわかる。

ここでどのようにして(6.49)の解を見つけるかについて説明したい。これもフーリエが発見した方法であり、フーリエの変数分離の方法とよばれる。

その方法では、まず $t$ だけの関数と $x$ だけの関数の積の形、すなわち、

$$(6.50) \quad u = \eta(t)\zeta(x)$$

の形の関数で(6.1), (6.41)を満たすものを探す。(6.50)の関数が(6.1)を満たすための条件は、代入により

$$\eta'(t)\zeta(x) = \kappa\eta(t)\zeta''(x)$$

であることがわかる。これは

$$(6.51) \quad \frac{\eta'(t)}{\kappa\eta(t)} = \frac{\zeta''(x)}{\zeta(x)}$$

と書き直されるが、この(6.51)の両辺の共通値は $t$ ,  $x$ によらない定数である。なぜなら、共通値が $t$ によらないことは(6.51)の右辺をみればわかるし、逆に、 $x$ によらないことは(6.51)の左辺をみればわかるからである。よって、ある定数 $\lambda$ に対して

$$(6.52) \quad \frac{\eta'(t)}{\kappa\eta(t)} = \frac{\zeta''(x)}{\zeta(x)} = \lambda$$

が成り立つことになるが、この右側の等号から

$$(6.53) \quad \zeta''(x) = \lambda\zeta(x)$$

が導かれる。

この方程式の解で、境界条件  $\zeta(0) = \zeta(\pi) = 0$  を満たし、 $\zeta \equiv 0$  ではないものは — 固有値問題の解である —

$$(6.54) \quad \begin{cases} \lambda = -n^2 \\ \zeta(x) = \sin nx \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって与えられる。λがこのように定められたので、(6.52)の左の等号から

$$(6.55) \quad \eta'(t) = \kappa \lambda \eta(t) = -\kappa n^2 \eta(t)$$

が導かれる。この方程式の解として

$$(6.56) \quad \eta(t) = e^{-\kappa n^2 t}$$

をとり、すでに得た  $\zeta$  とともに (6.50) に代入すれば (6.49) が得られる。これがフーリエの方法である。

微分方程式 (6.1) および境界条件 (6.41) は線形同次であるから、解  $\phi_n$  の定数倍も、そのような関数を加え合わせた線形結合も、さらには無限和もやはり解である。すなわち、 $c_n$  を係数として

$$(6.57) \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\kappa n^2 t} \sin nx$$

とおくと、 $u$  は (6.1) および (6.41) を満たす。あとは、 $u$  が初期条件 (6.42) を満たすように係数  $c_n$  を選ぶだけである。すなわち

$$(6.58) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = f(x)$$

が成り立つように  $c_n$  を定めるのである。

さて、正弦関数だけからできている (6.58) の左辺が奇関数であることを考慮して、 $f$  を原点の左側へ奇関数になるように延長する。そうして得られた奇関数を  $\tilde{f}$  で表す。

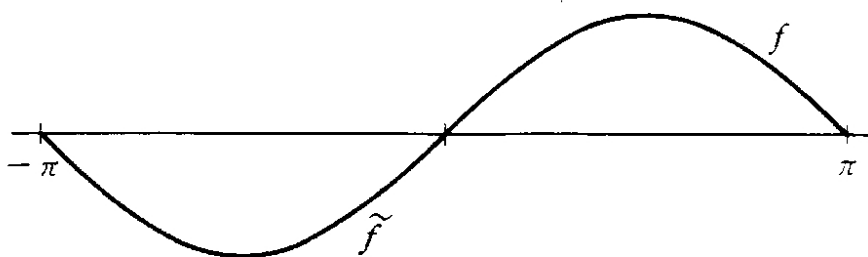


図 6-9

そうすると (6.58) の代わりに

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = \tilde{f}(x) \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

が成り立つように  $c_n$  を決めることになる。この等式は  $\tilde{f}$  のフーリエ展開にほかならない。 $\tilde{f}$  が奇関数であるから余弦関数の項は登場していない。(6.14) によれば  $\tilde{f}$  の正弦項  $\sin nx$  に対するフーリエ係数  $b_n$  は

$$(6.59) \quad \begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \end{aligned}$$

となる。この  $b_n$  を  $c_n$  に用いればよい。すなわち

$$(6.60) \quad c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

結局、この  $c_n$  を用いたときの (6.57) の  $u$  が求める初期値境界値問題の解である。

境界条件だけが (6.41)' で置き換えられた初期値境界値問題も同様にして解くことができる。結果だけを示すと、解は次のようになる；

$$(6.61) \quad u(t, x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\kappa n^2 t} \cos nx,$$

ここで、

$$(6.62) \quad c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

## 6.5 弦の振動

バイオリン等の弦楽器の弦は両端を固定されていて、横に引っ張ったり、弾いたりすると振動を起こす。こうした弦の横振動をフーリエ級数を用いて解析してみよう。

いま、考える弦は  $x$  軸上の区間  $[0, \pi]$  に張られてあり、したがって、両端 A, B の座標がそれぞれ  $x = 0, x = \pi$  であるものとする。

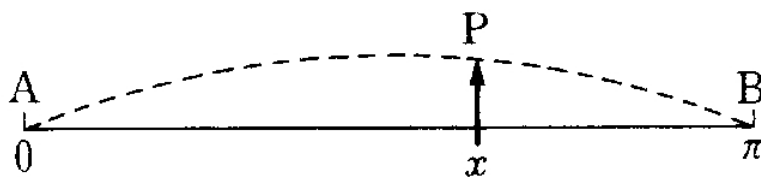


図 6-10

時刻  $t$  における座標  $x$  の点 P の変位、今の場合  $x$  軸に垂直な方向の変位を  $u(t, x)$  で表すと、変位が微小な範囲では、弦の振動を支配する方程式は

$$(6.63) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

で与えられる。ここで  $c$  は弦の密度や張力によって定まる正の定数である。

一般に (6.63) の形の方程式は、変化が時間とともに一定の速さで空間を伝わる現象、いわゆる波動現象を記述する際にしばしば登場するので、波動方程式とよばれる ((6.63) はその 1 次元の場合である)。波動現象の場合には、上の定数  $c$  は波動の伝播速度の意味をもっている。

実際、弦の問題を離れて方程式 (6.63) 自体に着目すると、代入によってすぐ確かめられるように、 $\phi$  を 1 変数の任意の関数として、

$$u = \phi(x - ct)$$

は (6.63) の解になっている。この解のグラフは  $\phi$  のグラフを  $x$  軸の正の方向に  $ct$  だけ平行移動したものであり、したがって、時間がたつと一定速度  $c$  で進行する。同様に、

$$u = \phi(x + ct)$$

も (6.63) の解であるが、これは、 $x$  軸の負の方向に速度  $c$  で進行する解になっている。

弦の振動に戻ろう。 $u(t, x)$  に対する境界条件は、両端で弦が固定されているので

$$(6.64) \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$$

となる。また、初期条件は  $t = 0$  における各点  $P$  の横方向への変位および速度を指定することに相当して

$$(6.65) \quad u|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x)$$

が課せられる。

このように弦の横振動の解析は、与えられた関数  $f, g$  に対して (6.63), (6.64), (6.65) を満足する  $u = u(t, x)$  を求める初期値境界値問題に帰着するのである。

この初期値境界値問題についても解の一意性が成り立つが、ここではそれに立ち入らず、フーリエの方法による解の構成だけを行うことにする。

さて、フーリエの方法における変数分離型の解を  $\eta(t) \cdot \zeta(x)$  とおいて (6.63) に代入すれば、 $\lambda$  を分離定数として

$$(6.66) \quad \frac{\eta''(t)}{c^2 \eta(t)} = \frac{\zeta''(x)}{\zeta(x)} = \lambda$$

が得られる。これから  $\zeta(x)$  を定める条件は、境界条件 (6.64) も考慮して、固有値問題

$$(6.67) \quad \zeta''(x) = \lambda \zeta(x), \quad \zeta(0) = \zeta(\pi) = 0$$

に帰着する。この固有値問題の解は

$$(6.68) \quad \lambda = -n^2, \quad \zeta(x) = \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

である。この  $\lambda$  の値を用いると  $\eta(t)$  を定める条件は (6.66) から

$$(6.69) \quad \eta''(t) = -c^2 n^2 \eta(t)$$

となる。この2階微分方程式の独立な解をそれぞれ初期条件

$$(6.70) \quad \begin{cases} \eta(0) = 1 \\ \eta'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{および} \quad \begin{cases} \eta(0) = 0 \\ \eta'(0) = 1 \end{cases}$$

に応じて選ぶと

$$(6.71) \quad \eta(t) = \cos nct, \quad \eta(t) = \frac{1}{nc} \sin nct$$

の二つの解が得られる。結局、フーリエの方法における変数分離型の解として

$$\cos nct \sin nx, \quad \frac{1}{nc} \sin nct \sin nx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

という2組の関数列が得られた。これらの関数の重ね合わせ、すなわち、適当な係数をかけて総和をとった形に  $u$  をおく。そうするとあとは初期条件に合わせるだけである。すなわち、

$$(6.72) \quad u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nct \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{1}{nc} \sin nct \sin nx$$

が, (6.65) を満たすように係数  $\alpha_n, \beta_n$  を選びたい。そのために, (6.72) で  $t = 0$  とおいたもの, また,  $t$  で微分してから  $t = 0$  とおいたものを  $f, g$  のそれぞれと等置すれば,

$$(6.73) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nx = f(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nx = g(x)$$

これらの条件から, 前節と同様にして,

$$(6.74) \quad \alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad \beta_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin nx \, dx$$

が導かれる。言い換えれば,  $f, g$  から (6.74) に従って計算した係数を (6.72) に用いたものが求める初期値境界値問題の解である。

## 6.6 弦を伝わる波動

前節で考えた弦の振動の問題を, 両端固定の境界条件の代わりに,  $x$  に関する周期性の境界条件のもとで考えてみよう。便宜上, 周期は  $2\pi$  であるとする。すなわち, 求める  $u = u(t, x)$  は, 波動方程式

$$(6.75) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

および与えられた  $f, g$  (これらも周期  $2\pi$  をもつとする) に対して, 初期条件

$$(6.76) \quad u|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x)$$

を満足するうえに,  $x$  に関して周期  $2\pi$  をもつ周期関数であるとするのである。

この問題の物理的なイメージとしては, 半径 1 の円周の形をした弦の微小振動を考えてみればよい。なお, 周期性を仮定しないで, 区間  $[-\pi, \pi]$  で考え, 境界条件

$$(6.77) \quad u(t, -\pi) = u(t, \pi), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, -\pi) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi)$$

を課しても同じことになる。こちらの解が得られてから周期的に延長すればよいからである。

さて, 詳しい計算は各自の演習問題とするが, 波動方程式および周期性の仮定を満足する, 変数分離型の解をフーリエの方法によってつくれば, 次の結果が得られる。

$$(6.78) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}, \frac{t}{2}, \\ \cos nct \cos nx, \frac{1}{nc} \sin nct \cos nx \\ \cos nct \sin nx, \frac{1}{nc} \sin nct \sin nx \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

これらの関数の重ね合わせとして  $u$  を構成するのであるが, その形は

$$(6.79) \quad \begin{aligned} u(t, x) = & \frac{1}{2} \alpha_0 + \frac{1}{2} \gamma_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_n \cos nct + \frac{\gamma_n}{nc} \sin nct \right) \cos nx \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \beta_n \cos nct + \frac{\delta_n}{nc} \sin nct \right) \sin nx \end{aligned}$$

となる。ここでの係数  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty, \{\beta_n\}_{n=1}^\infty, \{\gamma_n\}_{n=0}^\infty, \{\delta_n\}_{n=1}^\infty$  は、初期条件から課せられる等式

$$(6.80) \quad \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) = f(x)$$

および

$$(6.81) \quad \frac{1}{2}\gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n \cos nx + \delta_n \sin nx) = g(x)$$

から定められる。すなわち、これらは、それぞれ  $f, g$  のフーリエ係数にほかならない。言い換えれば、 $f, g$  のフーリエ係数を用いたときの

(6.79) が周期性の条件のもとでの初期値問題の解である。

ついでに次の考察も行っておこう。いま、初期条件における  $f, g$  の間に

$$(6.82) \quad g(x) = cf'(x)$$

という関係が成り立つものとする。

この関係を  $f, g$  のフーリエ級数を用いて書けば

$$(6.83) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2}\gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n \cos nx + \delta_n \sin nx) \\ &= c \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-n\alpha_n \sin nx + n\beta_n \cos nx) \right\} \end{aligned}$$

が任意の  $x$  に対して成り立つことになる。したがって、フーリエ係数の間の関係として

$$(6.84) \quad \begin{cases} \gamma_0 = 0 \\ \gamma_n = nc\beta_n, \quad \delta_n = -nc\alpha_n \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

が成り立たねばならない。(6.84) の第2式および第3式で結ばれている係数に関係した項を (6.79) からとり出して、それらの和を計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \beta_n \cos nct \sin nx + \gamma_n \frac{1}{nc} \sin nct \cos nx \\ &= \beta_n (\cos nct \sin nx + \sin nct \cos nx) \\ &= \beta_n \sin n(x + ct), \\ & \alpha_n \cos nct \cos nx + \delta_n \frac{1}{nc} \sin nct \sin nx \\ &= \alpha_n (\cos nct \cos nx + \sin nct \sin nx) \\ &= \alpha_n \cos n(x + ct) \end{aligned}$$

したがって、このとき (6.79) の  $u$  は

$$(6.85) \quad u(t, x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n(x + ct) + \beta_n \sin n(x + ct))$$

と書き直される。これと  $f$  のフーリエ展開 (6.80) とを比較すると

$$(6.86) \quad u(t, x) = f(x + ct)$$

であることがわかる。すなわち、(6.82) という特別な状況のもとでは、解は初期値の関数が速度  $c$  で左に進む進行波解であることが示された。右に進む進行波解となるのは、 $f, g$  がどのような条件を満たすときかを調べることは各自の演習としよう。

## 6.7 複素フーリエ級数

一般論に戻り，周期  $2\pi$  の関数  $f$  が次のようにフーリエ級数に展開されているとする。

$$(6.87) \quad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

複素指数関数と正弦，余弦関数についてのオイラーの公式に基づく関係

$$(6.88) \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

から，

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

となるが，これを (6.87) に代入すると  $f(x)$  は，

$$(6.89) \quad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{-inx}$$

の形に複素指数関数の列

$$(6.90) \quad e^{ikx} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

によって展開される。ここで，係数  $\{c_k\}$  を

$$(6.91) \quad c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2i}b_k & (k \geq 1) \\ \frac{1}{2}a_{-k} - \frac{1}{2i}b_{-k} & (k \leq -1) \end{cases}$$

により定義すれば，(6.89) はより簡潔に

$$(6.92) \quad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

と書き改められる。この展開を  $f$  の複素フーリエ級数という。上では  $f$  の複素フーリエ級数を通常のフーリエ級数を通じて導いたが，複素フーリエ係数  $c_k$  を計算するのは，直接に複素指数関数の直交性（下の (6.95)）を用いるほうが明快である。さらに，複素フーリエ級数は  $f$  自身が複素数値の場合に特に便利である（ $x$  はあくまで実数の変数であるが）。

複素指数関数の直交性に入る前に， $k$  を整数とするとき  $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$  は周期  $2\pi$  をもつこと，また，次の関係が成り立つことに注意しておこう。

$$(6.93) \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = \begin{cases} 2\pi & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

なお，周期  $2\pi$  の実数値関数の内積を (6.26) により定義したが，複素数値関数の場合には内積の定義を次のように変更する。すなわち， $u, v$  を周期  $2\pi$  をもつ複素数値関数であるとし， $\overline{\quad}$  で共役複素数を表すならば， $u, v$  の内積  $(u, v)$  は

$$(6.94) \quad (u, v) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \overline{v(x)} dx$$

により定義される。こうすると、次の直交性を (6.93) を用いて確かめることはたやすい。

$$(6.95) \quad (e^{ikx}, e^{ilx}) = \begin{cases} 2\pi & (k = l) \\ 0 & (k \neq l) \end{cases}$$

いま、 $m$  を任意の整数として (固定し)、(6.92) の両辺と  $e^{imx}$  との内積を、(6.95) の直交性を用いて計算すれば

$$(6.96) \quad (f, e^{imx}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (e^{ikx}, e^{imx}) = 2\pi c_m$$

となる。よって、 $f$  から複素フーリエ係数を求める公式は

$$(6.97) \quad c_k = \frac{1}{2\pi} (f, e^{ikx}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

で与えられる。

言い換えれば、この係数を用いたとき、 $f$  の複素フーリエ級数展開 (6.92) が、一般に成り立つのである (詳しく言えば、展開される関数に対して通常のフーリエ級数の場合と同様な条件が付くが)。

なお、フーリエ級数および複素フーリエ級数において、関数の周期が  $2\pi$  とは限らない場合も応用上大切である。それについては主として第 8 章で扱うことにするが、特に第 7 章で必要な周期が 2 の場合は補足 II でも紹介されている。

## 6.8 補足 I; 不等式 (6.33) の証明

(6.32) の

$$\gamma_n = \int_{-\pi}^{\pi} \eta_n(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^n \frac{x}{2} dx$$

に対して、 $\gamma_n$  の下からの評価 (6.33) を示す。

$$\gamma_n = 2 \int_0^{\pi} \cos^n \frac{x}{2} dx$$

において、 $t = \cos \frac{x}{2}$  による変数変換を行えば

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \sqrt{1-t^2}$$

であるから

$$dx = -2 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

よって

$$\gamma_n = 4 \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

ところが、積分範囲  $0 \leq t < 1$  において

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \geq 1$$

である。よって、

$$\gamma_n \geq 4 \int_0^1 t^n dt = \frac{4}{n+1} \geq \frac{4}{2n} = \frac{2}{n} \quad (n \geq 1)$$



となる。すなわち (6.33) が  $c = 2$  として成立する。

実は、オイラーのベータ関数

$$B(p, q) = \int_0^1 s^{p-1}(1-s)^{q-1} ds = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

を用いて計算し、スターリングの公式 (J. Stirling, 1692–1770) も援用すれば、より精密な評価

$$\gamma_n \geq C_1 \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (C_1 \text{ はある正定数})$$

を示すことができるが、本章の目的には (6.33) で十分なのである。

## 6.9 補足 II; 基礎の区間の長さの変更

この章の本論では、フーリエ展開を考える関数  $f$  は周期  $2\pi$  をもつとした。また、その結果を用いる熱方程式の初期値境界値問題では、 $x$  の区間が  $[0, \pi]$  であるとして、その両端  $x = 0, x = \pi$  で境界条件を課した。この周期  $2\pi$  をもつ関数に対する結果を一般の大きさの周期  $l$  をもつ関数へ拡張することは、複素フーリエ展開について第 8 章で学ぶのであるが、ここでは、次章での利用を考慮して、周期  $2$  をもつ関数の正弦、余弦によるフーリエ展開に触れておこう。

いま、 $f = f(x)$  は周期  $2$  をもつ滑らかな関数であるとする。一方、周期  $2$  をもつ基本的余弦関数、正弦関数の列は

$$(6.98) \quad \{\cos n\pi x\}_{n=0}^{\infty}, \quad \{\sin n\pi x\}_{n=1}^{\infty}$$

である。このとき、

$$(6.99) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$$

の形の展開が成り立つ (これが周期が  $2$  の場合の、あるいは基礎区間が  $[-1, 1]$  の場合のフーリエ展開である)。ただし、(6.99) の係数  $a_n, b_n$  は

$$(6.100) \quad \begin{cases} a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x dx & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x dx & (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

で与えられる。

(6.99), (6.100) が成り立つことを確かめるには、本文の推論をたどり直してもよいが、変数変換

$$(6.101) \quad y = \pi x \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{y}{\pi}$$

を行い、関数を  $y$  に関して周期  $2\pi$  をもつように変換するのが、一つの便利な方法である。実際、

$$(6.102) \quad g(y) = f(x) = f\left(\frac{y}{\pi}\right)$$

とおけば、 $g$  は周期  $2\pi$  をもつ。したがって、本文での結果から

$$(6.103) \quad g(y) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos ny + B_n \sin ny)$$

ただし

$$(6.104) \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos ny \, dy, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin ny \, dy$$

となる。(6.104) の定積分において、積分変数の変換  $y = \pi x$  を行えば、(6.100) の  $a_n, b_n$  と (6.104) の  $A_n, B_n$  が、それぞれ一致することが容易にわかる。さらに、(6.103) において  $y = \pi x$  と書き直せば、周期が 2 である関数のフーリエ展開の公式 (6.99)–(6.100) が示されたことになる。

(6.99), (6.100) を用いれば、たとえば、熱方程式の初期値境界値問題 (6.1), (6.41),  $x$  の区間が  $[0, 1]$  に変更され、境界条件 (6.41) が

$$(6.105) \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$$

で置き換えられた場合の解は<sup>16</sup>

$$(6.106) \quad u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x$$

ただし

$$(6.107) \quad b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で与えられることが導かれる。その検証は適度な演習問題であろう。

---

<sup>16</sup>三訂版では、(6.106) において、 $e^{-n^2 \pi^2 t}$  という因子が抜け落ちています。ちょっとひどい誤植。

# 第7章 発展系の数値解析

## 7.1 コンピューター・シミュレーションの意義

さまざまな現象が、数学的には微分方程式の形で表現されることは、すでにこの科目でも、何度も見て来た通りである。ところが、微分方程式の解を具体的に求めることは、常に可能であるとは限らない。たとえば第4章<sup>1</sup>「惑星の運動の数理」において、太陽の周りを万有引力の法則に従って運動する一つの惑星の軌道を求めることはできたが、二つ以上の惑星を同時に考慮した場合には、同様の手段で解を求められないことが証明されている(三体問題の不可能性)。この「解を求めることができない」というのは、解が存在しないということでも、まして現在の人類の持っている数学の知識が不十分であるために解けない、という意味でもなく、良く知られている関数を使って解を表現する公式がない、ということである。

この冷厳な事実気付いた後に数学者が行ったことは、一つには微分方程式の解として、逆に新しい関数を定義することであった。この努力の結果、一般に特殊関数とよばれる多くの関数が導入されることとなり、応用数学の中で一定の位置を占めている。

もう一つの方向は、解が存在するかどうか、解が存在したとしてそれが一意(ただ一つに限る)かどうか、さらには解がどのような定性的な性質を持つか、を論ずることである。この努力は、現在でも盛んに続けられていて豊富な理論が築きあげられている。

しかしながら、微分方程式の解の定性的な性質がわかっただけで、定量的な情報が一切得られないのでは、満足できないことが多いのも、また確かである。さらに微分方程式を見ただけで、解の性質を知るのもそう容易なことではない。そのため、様々な近似解法が工夫されることになった。その中には数値解法もあったが、人力での数値計算でできることにはおのずと限界があった。

コンピューターの出現により、大規模な数値計算が可能になったことで、このあたりの事情は大きく変わるようになった。コンピューター・シミュレーションによって、実際の応用に大いに役立つ、定量的な情報を入手できるようになった。それだけにとどまらず、豊富なコンピューター・シミュレーションによって、それなしではわかり難かった、問題の定性的な性質が明らかになることも多い。現在の応用数学にとって、コンピューター・シミュレーションは必要不可欠なものとなっている。

この章では、微分方程式、特に偏微分方程式の代表的な数値解法である差分法について学ぶことにする。差分法とは

1. 問題を考えている領域を格子で区切って、各格子点上での値を求めることを目標にする。
2. 微分方程式に現れる微分係数を差分商で置き換えて(微分方程式を近似する)差分方程式を作る。

という方針で離散的な問題(差分方程式と呼ばれる — 後述)を導き、それを数値計算で解いたもの(差分解と呼ばれる)を、元の問題の近似解として採用する、というのが基本的な考え方であり、極めて汎用性が高い。差分法が数値解法の基礎として、応用数学に役立つものであることは当然であるが、差分法自身にひそむ数理の探求も、重要な応用数学の主題である。特に、微分方程式の解の存在、一意性、解の定性的性質の研究を背景にしている部分が少なくないことも注意しておこう。

<sup>1</sup>藤田宏、「応用数学」、放送大学出版会の第4章のこと。

## 7.2 差分近似

ここでは、後の議論に必要な、いくつかの差分近似式を導いておこう。

関数  $f$  の点  $x$  における微分係数  $f'(x)$  の定義

$$(7.1) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を見れば、 $|h|$  が十分小さいとき、 $f'(x)$  の近似値として前進差分商

$$(7.2) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を採用することを真っ先に思いつく。これは  $f'(x)$  に対する前進差分近似と呼ばれる。ここでは  $f$  の Taylor 展開を用いて、さらに色々な近似式を導いてみよう。

$f$  が点  $x$  の近傍で十分滑らかとすると、

$$(7.3) \quad f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{4!}h^4 + \dots$$

が成り立つ。 $h$  を  $-h$  で置き換えると、

$$(7.4) \quad f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{4!}h^4 + \dots$$

(7.3) から

$$(7.5) \quad f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \quad (h \rightarrow 0)$$

が導かれる。すなわち前進差分近似の誤差は  $O(h)$  であることがわかる。ここで現れた  $O(h)$  はいわゆる Landau の記号である (補足 (1) (p. 39) で説明してある)。一方 (7.4) からは

$$(7.6) \quad f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h) \quad (h \rightarrow 0)$$

が得られる。この右辺の第 1 項を後退差分商と呼ぶ。 $f'(x)$  に対する後退差分近似の誤差はやはり  $O(h)$  である。

次に (7.3) から (7.4) を引いて整理すると

$$(7.7) \quad f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (h \rightarrow 0)$$

が得られる。この右辺第 1 項を 1 階中心差分商と呼ぶ。 $f'(x)$  に対する 1 階中心差分近似の精度は  $O(h^2)$  で、前進差分近似、後退差分近似よりも近似の精度が高いことがわかる。

最後に (7.3) と (7.4) を辺々加えて整理すると、次式を得る:

$$(7.8) \quad f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \quad (h \rightarrow 0).$$

この右辺第 1 項を 2 階中心差分商とよぶ。

問 上の各式を厳密に証明せよ。Landau の記号の定義に現れる定数  $C$  はどう取ればよいか?

問  $f$  が  $x$  の近傍で  $C^2$  級ならば、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$  であることを証明せよ。

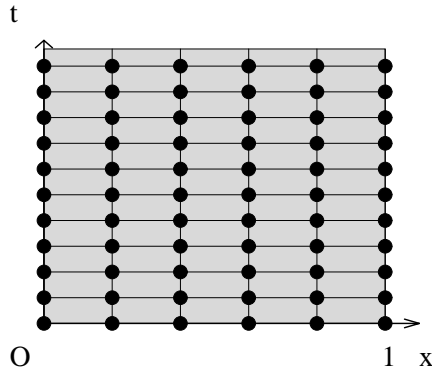


図 7.1: 閉領域  $[0, 1] \times [0, \infty)$  を格子で分割する

### 7.3 熱方程式の陽的差分法による解法

ここでは、第 6 章で取り扱った熱伝導方程式 (熱方程式) の初期値境界値問題

$$(7.9) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (t > 0, 0 < x < 1)$$

$$(7.10) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (t > 0)$$

$$(7.11) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を考える。

差分法では、解  $u = u(x, t)$  の定義域  $[0, 1] \times [0, +\infty)$  を図 7.1 のような格子に切り、各格子点  $(x_i, t_n)$  における  $u$  の値

$$(7.12) \quad u_i^n := u(x_i, t_n)$$

の近似値  $U_i^n$  を求めることを目標にする。

空間変数  $x$  の区間  $[0, 1]$  を  $N$  等分して、等分点を  $x_i$  ( $i = 0, \dots, N$ ) としよう。すなわち、刻み幅 (stepsize) を  $h = 1/N$  として、

$$(7.13) \quad x_i = ih \quad (i = 0, 1, \dots, N).$$

とおく。次に時間変数  $t$  に関する刻み幅  $\tau$  ( $> 0$ ) を 1 つ定めて、

$$(7.14) \quad t_n = n\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とおく。

格子点  $(x_i, t_n)$  において、 $\frac{\partial u}{\partial t}$  を前進差分近似、 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  を 2 階中心差分近似すると、

$$(7.15) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + O(\tau) \quad (\tau \rightarrow +0),$$

$$(7.16) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + O(h^2) \quad (h \rightarrow +0)$$

となる。 $u$  は熱伝導方程式 (7.9) を満たすので、 $h$  と  $\tau$  が十分小さいとき、

$$(7.17) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} \doteq \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}$$

がなりたつ。

そこで、 $U_i^n$  について

$$(7.18) \quad \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2}$$

という方程式を課すことにする。

このような、未知数列に関する方程式で、差分を含む方程式を差分方程式という<sup>2</sup>。ここで添字  $n$  は 0 以上の任意の整数に対して意味があるが、 $i$  については  $U_{i-1}^n, U_{i+1}^n$  が現れるため  $i = 0, N$  に対して (7.18) を考えることはできず、 $1 \leq i \leq N - 1$  となることに注意しよう。分母を払って  $\lambda = \tau/h^2$  とおくと

$$(7.19) \quad U_i^{n+1} - U_i^n = \lambda(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n).$$

移項して

$$(7.20) \quad U_i^{n+1} = (1 - 2\lambda)U_i^n + \lambda(U_{i-1}^n + U_{i+1}^n) \quad (1 \leq i \leq N - 1; n = 0, 1, \dots)$$

となる。

一方境界条件 (7.10) に対応して

$$(7.21) \quad U_0^n = U_N^n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

初期条件 (7.11) に対応して

$$(7.22) \quad U_i^0 = f(x_i) \quad (0 \leq i \leq N)$$

を考えるのは自然であろう。

以上をまとめると、熱伝導方程式の初期値境界値問題 (7.9), (7.10), (7.11) に対応して、未知数列  $\{U_i^n; 0 \leq i \leq N, n \geq 0\}$  に関する方程式系

$$(7.23) \quad U_i^{n+1} = (1 - 2\lambda)U_i^n + \lambda(U_{i-1}^n + U_{i+1}^n) \quad (1 \leq i \leq N - 1; n = 0, 1, \dots)$$

$$(7.24) \quad U_0^n = U_N^n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$(7.25) \quad U_i^0 = f(x_i) \quad (0 \leq i \leq N)$$

が得られる。

この方程式の解  $\{U_i^n; 0 \leq i \leq N, n \geq 0\}$  は次のようにして計算することができる。

1. 右肩の添字  $n$  が 0 の部分  $\{U_i^n; 0 \leq i \leq N\}$  については、(7.25) により値を求める。
2.  $n = 0, 1, \dots$  の順に次の手順で  $\{U_i^{n+1}; 0 \leq i \leq N\}$  を求める。
  - (a)  $1 \leq i \leq N - 1$  について  $U_i^{n+1}$  を (7.23) で求める。
  - (b)  $i = 0, N$  については (7.24) により  $U_0^{n+1} = U_N^{n+1} = 0$ 。

この方法は前進 Euler 法と呼ばれる。あるいは、差分方程式が  $U_i^{n+1}$  について閉じた式 (それを求めるために方程式を解く必要がない) になっていることを前面に出して、陽解法または陽的差分法と呼ぶことも多い。

<sup>2</sup> 「差分」とは何? という素朴な疑問に対して、きちんと回答するのは結構難しい。広辞苑によると「変数のとる一連の数値に対応して関数のとる値の差」とのことだが、例えば  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  のような Fibonacci 数列を定義する「漸化式」も差分方程式と呼ばれる。

$N$	$u(1/2, 0.1)$ の近似値	相対誤差 (%)
10	0.36654433	1.653709
20	0.37118820	0.407728
40	0.37232923	0.101583
80	0.37261327	0.025374
160	0.37268420	0.006342
320	0.37270193	0.001585
640	0.37270636	0.000396

表 7.1:  $(x, t) = (1/2, 0.1)$  で値の変化 ( $\lambda = 1/2$ ).

## 7.4 数値実験例

前節で導いた計算式に基づいて、実際にコンピューターで計算してみた結果を紹介しよう。

### (1) 解析解との比較

偏微分方程式の問題に対して、差分法で求めた近似解、すなわち差分方程式の解のことを差分解とよび、それに対して元の偏微分方程式の解のことを厳密解とよぶ。厳密解は、それを解析的に表示した (式で表した) 場合解析解ともよばれる。

ここでは初期値境界値問題 (7.9)-(7.11) の解析解  $u$  が簡単に求まる場合について、その解析解と差分解を比べてみよう。初期条件の関数  $f$  を  $f(x) = f_0(x) \equiv \sin \pi x$  とすると、解  $u$  は

$$(7.26) \quad u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$$

となる。このことは、第 6 章で扱った公式

$$(7.27) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 \pi^2 t} \sin k \pi x, \quad b_k = 2 \int_0^1 f(x) \sin k \pi x \, dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

中の係数  $b_k$  を計算して  $b_1 = 1, b_k = 0$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) となることを示してもよいし、(7.26) で定義される  $u$  が (7.9), (7.10), (7.11) を満足することを直接代入して確かめてもよい。表 7.1 は  $(x, t) = (1/2, 0.1)$  における値  $u(1/2, 0.1) = \exp(-0.1\pi^2) \sin(\pi/2) = 0.372707838 \dots$  に対する近似値を並べてみたものである。これを見ると、誤差が  $N$  の増加とともに減少して行っているのがよくわかる。図 7.2 はその様子を両側対数グラフに表したものである (対数グラフの読み方については、補足の (2) にまとめておいた)。グラフの横軸が  $N$  で、縦軸が相対誤差を表す。このグラフから、誤差は  $N^{-2}$  に比例していると推察できる。

### (2) 解の漸近挙動

時刻  $t$  を  $t \rightarrow +\infty$  とした場合の  $u(\cdot, t)$  の振る舞いのことを、解の漸近挙動とよぶ。

<ディリクレ (Dirichlet) 境界条件の場合>

初期値境界値問題 (7.9)-(7.11) の解の公式

$$(7.28) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 \pi^2 t} \sin k \pi x, \quad b_k = 2 \int_0^1 f(x) \sin k \pi x \, dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$



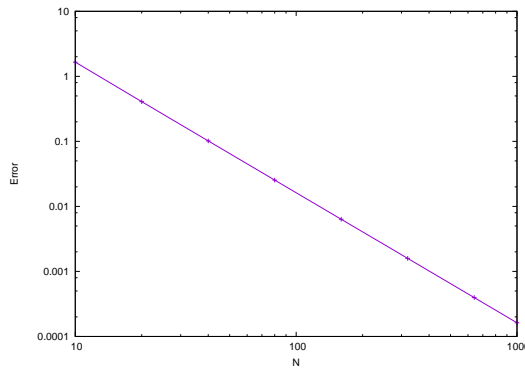


図 7.2:  $(x, t) = (1/2, 0.1)$  での相対誤差の変化 ( $\lambda = 1/2$ ).

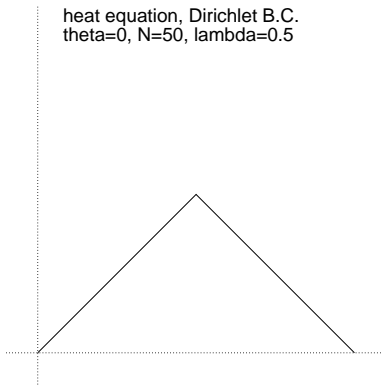


図 7.3: 初期条件  $f = f_1$

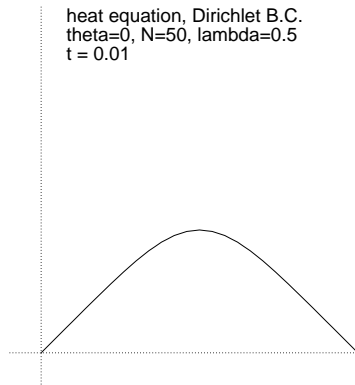


図 7.4:  $t = 0.01$

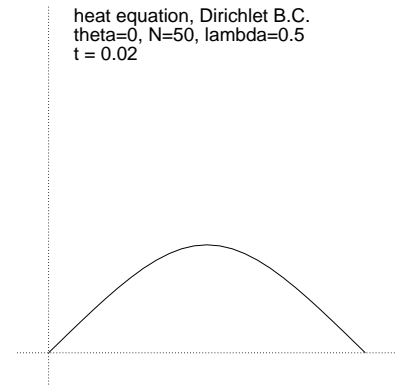


図 7.5:  $t = 0.02$

から、 $t \rightarrow \infty$  とすると、 $u$  は定数関数 0 に収束することがわかる:

$$(7.29) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

(式 (7.29) の厳密な証明は、補足 (3) にまとめておいた。)

このことを、初期条件の関数  $f$  が

$$(7.30) \quad f_1(x) = \begin{cases} x & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right) \\ 1 - x & \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$$

である場合 (グラフは図 7.3) に、差分法で (7.9)-(7.11) を解いて、確かめてみよう。  $N = 50$ ,  $\lambda = 1/2$  として解いた結果を描いたのが図 7.4 ~ 7.7 である。それぞれの図は、一つの固定された  $n$  の値に対する  $\{U_i^n; 0 \leq i \leq N\}$  の値をもとにして描かれている。すなわち、 $t = n\tau = 0.01, 0.02, 0.03, 0.04$  としたときの  $x$  の関数  $u(x, t)$  のグラフに対応するものである。グラフの横軸が位置、縦軸が温度を表していることを考えると、時間が経つにつれて、温度の高いところから低いところへ熱が流れていく様子が見える。図 7.8 は  $t = 0$  から  $t = 0.3$  まで 0.01 刻みの時刻におけるグラフをまとめて描いてみたものである。時間が経つにつれて、温度が 0 に近づいていくのがわかる。

### <ノイマン (Neumann) 境界条件の場合>

ここでは境界条件を同次ディリクレ境界条件 (7.10) から、同次ノイマン境界条件

$$(7.31) \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 \quad (t > 0)$$



heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=0, N=50, lambda=0.5  
t = 0.03

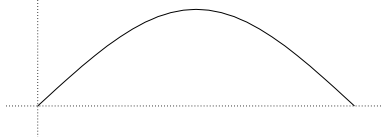


図 7.6:  $t = 0.03$

heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=0, N=50, lambda=0.5  
t = 0.04

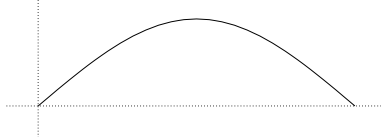


図 7.7:  $t = 0.04$

heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=0, N=50, lambda=0.5  
Tmax = 0.3, interval = 0.01

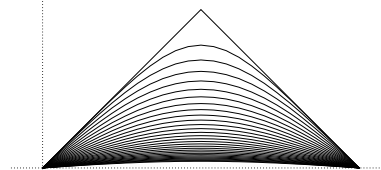


図 7.8: ディリクレ条件,  $t = 0 \sim 0.3$ ,  $\Delta t = 0.01$

heat equation, Neumann B.C.  
theta=0, N=50, lambda=0.5

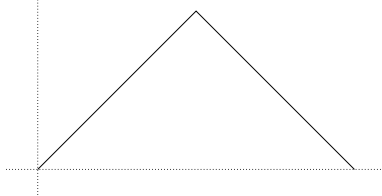


図 7.9:  $t = 0$

heat equation, Neumann B.C.  
theta=0, N=50, lambda=0.5  
t = 0.01

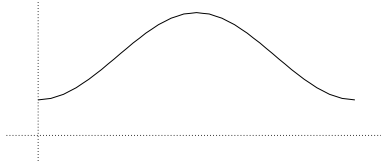


図 7.10:  $t = 0.01$

heat equation, Neumann B.C.  
theta=0, N=50, lambda=0.5  
t = 0.02

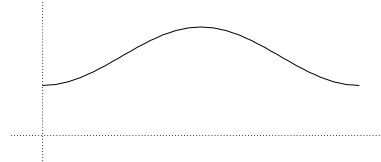


図 7.11:  $t = 0.02$

に変えた問題を考えよう。第 6 章と同様の計算により、

$$(7.32) \quad u(x, t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2\pi^2 t} \cos k\pi x, \quad a_k = 2 \int_0^1 f(x) \cos k\pi x dx \quad (k = 0, 1, \dots)$$

を導くことができる。この公式から、 $t \rightarrow \infty$  とすると、 $u$  はある定数関数に収束することがわかる:

$$(7.33) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \frac{a_0}{2} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

図 7.9~7.13 では、初期条件は  $f_1$  のままで、境界条件を同次ノイマン境界条件にした問題を、 $N = 50$ ,  $\lambda = 1/2$  の差分法で解いた場合の計算結果を示したものである。確かに時間が経つにつれ

heat equation, Neumann B.C.  
theta=0, N=50, lambda=0.5  
t = 0.03

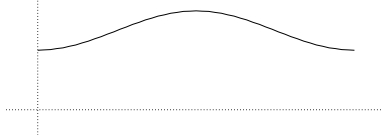


図 7.12:  $t = 0.04$

heat equation, Neumann B.C.  
theta=0, N=50, lambda=0.5  
t = 0.04

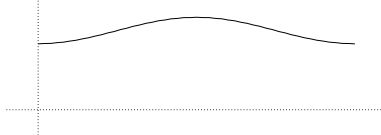


図 7.13:  $t = 0.05$

heat equation, Neumann B.C.  
theta=0, N=50, lambda=0.5  
Tmax = 0.2, interval = 0.01

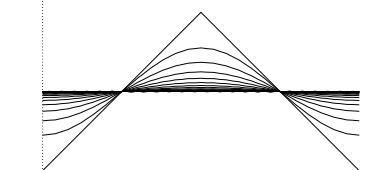


図 7.14:  $t = 0 \sim 0.2$

$t \setminus x$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.00	0.000000	0.100000	0.200000	0.300000	0.400000	0.500000
0.05	0.221849	0.227225	0.241301	0.258699	0.272775	0.278151
0.10	0.246121	0.246862	0.248801	0.251199	0.253138	0.253879
0.15	0.249466	0.249568	0.249835	0.250165	0.250432	0.250534
0.20	0.249926	0.249940	0.249977	0.250023	0.250060	0.250074
0.25	0.249990	0.249992	0.249997	0.250003	0.250008	0.250010
0.30	0.249999	0.249999	0.250000	0.250000	0.250001	0.250001
0.35	0.250000	0.250000	0.250000	0.250000	0.250000	0.250000
0.40	0.250000	0.250000	0.250000	0.250000	0.250000	0.250000

表 7.2: 定数定常解への収束 (ノイマン境界条件,  $\theta = 0$ ,  $N = 40$ ,  $\lambda = 0.5$ )

て  $u(\cdot, t)$  は定数関数に収束して行く様子がわかる。さらにその値についても調べてみよう。  $f = f_1$  に対して、

$$(7.34) \quad \frac{a_0}{2} = \int_0^1 f_1(x) dx = \text{図 7.3 のグラフと } x \text{ 軸の囲む三角形の面積} = \frac{1}{4}$$

であるが、数値解の値は表 7.2 のようになっている、解析解と同様に  $1/4 = 0.25$  へ収束して行く様に見える。(問題が対称なので、区間の左半分の値のみを示してある。)

### (3) 熱伝導方程式の平滑化作用、 $t \rightarrow \infty$ の際の漸近形

既に何回か、「熱は温度の高いところから低いところへ流れる」ので、温度の高いところは低くなり、温度の低いところは高くなる、ことを見て来ているが、より詳しく分析することにしよう。

#### 微分可能性とフーリエ係数の減衰

第 6 章で関数  $f$  のフーリエ級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\pi x + b_k \sin k\pi x),$$

の収束には、 $f$  の滑らかさ (微分可能性) が関係することに言及した。実は関数  $f$  が滑らかなほど、フーリエ係数  $a_k, b_k$  の絶対値  $|a_k|, |b_k|$  は  $k$  が増加するにつれてより速く減衰することがわかっている。たとえば、具体的には次のような事実がある:

$$(7.35) \quad f \text{ が } C^\ell \text{ 級 } (\ell \text{ 回連続的微分可能}) \implies a_k, b_k = o(k^{-\ell}) \quad (k \rightarrow +\infty).$$

また、これとは逆に、 $f$  のフーリエ係数がより速く減衰するならば、 $f$  はより高い微分可能性をもつ (=より多い回数微分できる) こともわかっている。実際

$$(7.36) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^\ell (|a_k| + |b_k|) < \infty \implies f \text{ は } C^\ell \text{ 級}.$$

それでは、 $f$  が図 7.15 のような、たくさんの角のあるグラフを持つ関数  $f_2$  の場合にはどうなるであろうか? この場合は、角となっている点で  $f$  は微分できないので、 $k \rightarrow +\infty$  のときの  $|a_k|, |b_k|$  の減衰はゆっくりである<sup>3</sup>。この  $f = f_2$  を初期値としたときの (7.9)-(7.11) の解を考えよう。解の公

<sup>3</sup>具体的には、 $a_k, b_k = o(1)$  ( $k \rightarrow \infty$ ) であるが、 $\sum_{k=1}^{\infty} k (|a_k| + |b_k|) = \infty$  である。

式 (7.27) を見ると、第  $k$  項には、時間に関する因子  $\exp(-k^2\pi^2t)$  がかかっている、これは  $t > 0$  のとき、 $k$  の増加につれ急激に小さくなる。従って、初期条件  $f = f_2$  が低い微分可能性しか持っていないとしても、少しでも時間が経過すると、 $u$  は高い微分可能性をもつ (実は無限回微分可能になる) ことが導かれる。

実際に  $f = f_2$  を初期データとした問題を差分法で解いた結果が図 7.15 ~ 7.20 である。これによると、すでに  $t = 0.001$  という早い段階で角が消滅していることがわかる。

### 凹凸の消滅

さらに時間が経過するにつれ、凹凸の激しいところほど急速に変形して消滅し、グラフが平滑な形に近づくことが見てとれる。凹凸が激しい (変化が急) などところがあるのは、大きな番号  $k$  に対する  $\sin k\pi x$  の項が大きな割合を占めているからであると推測できる。しかし  $k$  が大きいほど、時間に関する因子  $\exp(-k^2\pi^2t)$  は、 $t$  の増加につれて速く小さくなる。そのため、凹凸の変化が激しいところほど早く消滅する、と考えられる。

### 漸近形

公式 (7.27) において、 $t$  が非常に大きくなると、 $k = 2, 3, \dots$  の項は、 $k = 1$  に対応する項  $b_1 \exp(-\pi^2t) \sin \pi x$  に比べて無視できるほど小さくなることがわかる。すなわち  $t$  が大きいところでは、

$$(7.37) \quad u(x, t) \doteq b_1 e^{-\pi^2 t} \sin \pi x.$$

これはグラフでいうと、形がサイン・カーブの半周期分に近づくことを意味する。実際、図 7.20 ではそうなっている。

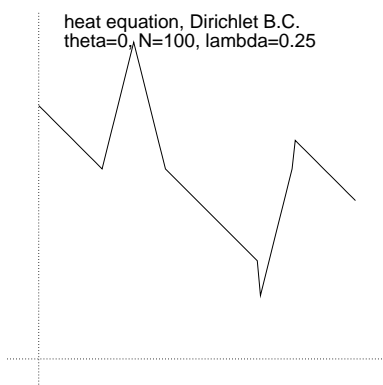


図 7.15:  $t = 0$

heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=0, N=100, lambda=0.25  
t = 0.003

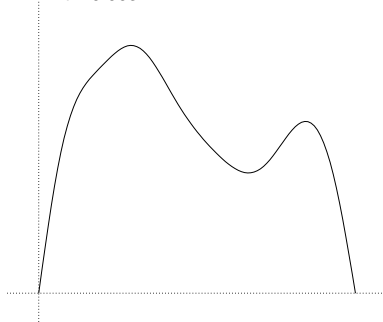


図 7.18:  $t = 0.003$

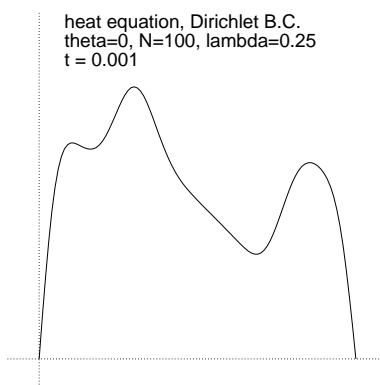


図 7.16:  $t = 0.001$

heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=0, N=100, lambda=0.25  
t = 0.004

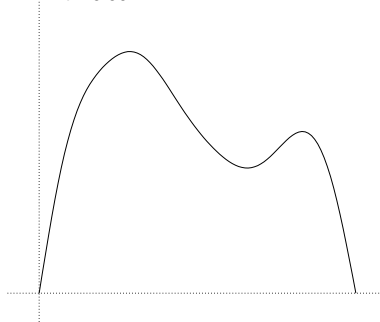


図 7.19:  $t = 0.004$

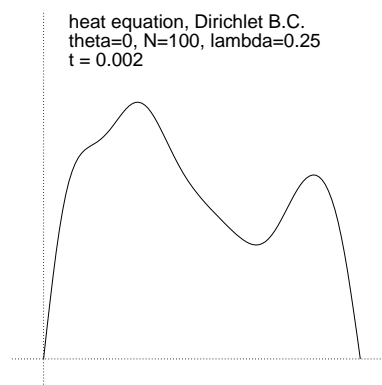


図 7.17:  $t = 0.002$

heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=0, N=100, lambda=0.25  
Tmax = 0.2, interval = 0.01

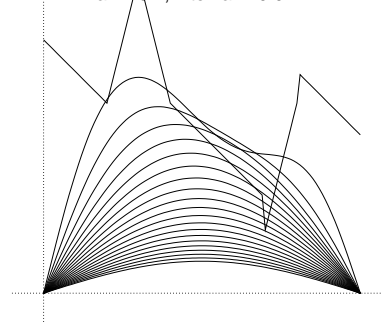


図 7.20:  $t = 0 \sim 0.2, \Delta t = 0.01$

## 7.5 陰解法

### (1) 安定性

前節で示した計算結果は、素朴に検討したに過ぎないが、なかなか満足の出来るものであった。ところが、うまく行かない場合もあることを見てみよう。

前節では、いずれの計算例も  $\lambda = \tau/h^2$  を  $1/2$  あるいは  $\lambda = 1/4$  として計算したのであるが、 $\lambda = 0.51$  として、 $f = f_1$  の場合の初期値境界値問題 (7.9)-(7.11) を解いたのが図 7.21~7.24 である。解こうとしている熱伝導方程式の初期値境界値問題自体は図 7.4~7.7 と同じものなのだが、計算結果は似ても似つかない悲惨なものになっている。このような現象を不安定現象とよぶ。これに対して、差分解の大きさが初期値、境界値で定まる定数 ( $N$  にも依存しない) で押えられるとき、差分スキームは安定である、という。

実は第 7.3 節で導いた差分方程式の解が、安定に計算できるための必要十分条件は、 $\lambda$  が  $0 < \lambda \leq 1/2$  を満たすことである、ということがわかっている。実際、 $0 < \lambda \leq 1/2$  のとき

$$(7.38) \quad |U_i^n| \leq \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad (0 \leq i \leq N; n = 0, 1, \dots)$$

が成り立つ (補足 (5) 定理 3 参照)。

さらに、この条件  $0 < \lambda \leq 1/2$  が満たされる場合は、任意に固定した正数  $T$  に対して

$$(7.39) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq n \leq T/\tau}} |u(x_i, t_n) - U_i^n| = 0$$

が成り立つこと、すなわち差分解の厳密解への収束も証明できる (これについても、補足 (5) 定理 2 を参照)。条件  $0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq T/\tau$  は、 $(x_i, t_n)$  が  $[0, 1] \times [0, T]$  に含まれることを意味する。

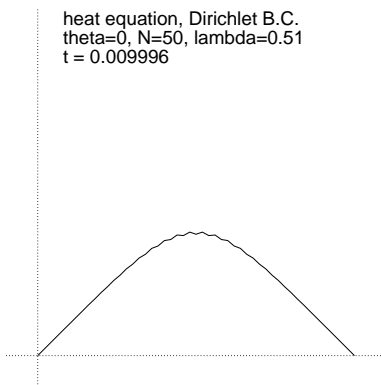


図 7.21:  $t = 0.009996$

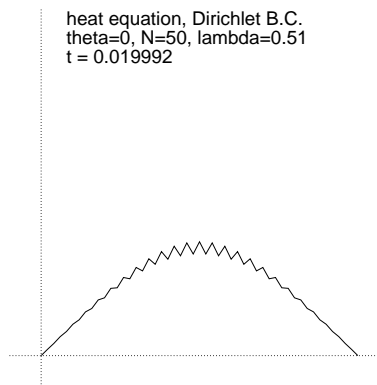


図 7.22:  $t = 0.019992$

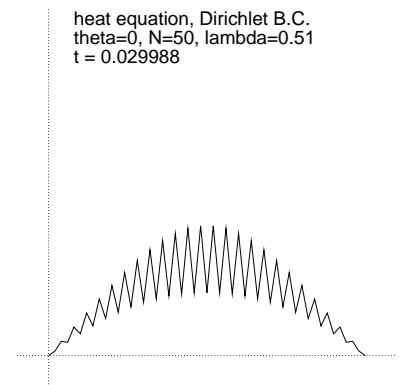


図 7.23:  $t = 0.029988$

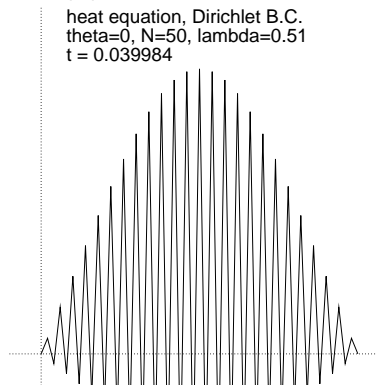


図 7.24:  $t = 0.039984$

## (2) 後退 Euler 法

前項では、第 7.3 節で導いた差分方程式の安定な計算のためには  $0 < \lambda \leq 1/2$  があれば十分であると述べたが、この条件を保証しようとする、計算量が大きく (= 計算に要する時間が長く) になりがちである。これを緩和するための、重要な手法を紹介しておこう。

第 7.3 節では、時間に関する偏導関数  $\frac{\partial u}{\partial t}$  を前進差分近似したが、これを後退差分近似に置き換えて得られる

$$(7.40) \quad \frac{U_i^n - U_i^{n-1}}{\tau} = \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} \quad (1 \leq i \leq N-1, n \geq 1)$$

を考えよう。番号  $n$  を一つずらすと、これは

$$(7.41) \quad \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2} \quad (1 \leq i \leq N-1, n \geq 0)$$

となる。移項して、二番目の添字が  $n$  であるものと、 $n+1$  であるものとを分離すると

$$(7.42) \quad (1 + 2\lambda)U_i^{n+1} - \lambda(U_{i-1}^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}) = U_i^n \quad (1 \leq i \leq N-1, n \geq 0)$$

のような差分方程式が得られる。この差分方程式にもとづいて差分解を定める方法を後退 Euler 法とよぶ。

(7.42) は第 7.3 節の方程式 (7.23) とは異なり、上付き添字が  $n+1$  の項が複数あることに注意しよう。(7.23) は、直接右辺の値を計算して、それを左辺に代入するという手順で、差分解  $U_i^{n+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ ) が順次求まったが、(7.42) を解くには、すべての  $i$  ( $1 \leq i \leq N-1$ ) についての方程式をまとめて考えた、連立 1 次方程式を解く必要がある。このことを区別するため、(7.23) を陽(的)公式、(7.42) を陰(的)公式とよぶ。

計算法の詳細は後述するが、後退差分近似公式で前項と同じ問題を、やはり  $\lambda = 0.51$  に対して解いたのが図 7.25~7.28 である。不安定現象が起こっていないのがわかる。実はこの公式 (7.42) では、 $\lambda (> 0)$  の値を何にしても、安定であることがわかっている。実際、図 7.29~7.32 では同じ問題を  $\lambda = 5$  で解いてあるが、まったく不安定現象は起こっていない。

## (3) $\theta$ 法, クランク-ニコルソン法

ここでは後退差分近似に基づく差分方程式の解の求め方を説明するが、せっかくだから少し一般化して、(7.41) の代わりに、(7.18) と (7.41) をいわば  $1 - \theta : \theta$  の重みで重ね合わせた公式

$$(7.43) \quad \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = (1 - \theta) \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} + \theta \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2}$$

を考えよう。ここで  $\theta$  はパラメーターで  $0 \leq \theta \leq 1$  なる範囲から選ぶものとする。この式は、 $\theta = 0$  とすると式 (7.18) に、 $\theta = 1$  とすると式 (7.41) に、それぞれ一致する。これまでと同様に、移項によって、左辺には添字が  $n+1$  の項が、右辺にはそれ以外の項があるようにすると

$$(7.44) \quad (1 + 2\theta\lambda)U_i^{n+1} - \theta\lambda(U_{i-1}^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}) = \{1 - 2(1 - \theta)\lambda\}U_i^n + (1 - \theta)\lambda(U_{i-1}^n + U_{i+1}^n) \quad (1 \leq i \leq N-1, n \geq 0)$$

となる。これは  $\{U_i^n; 0 \leq i \leq N\}$  が既にわかっているとした場合  $N+1$  個の未知数  $\{U_i^{n+1}; 0 \leq i \leq N\}$  に関する  $N-1$  個の方程式である。境界条件より

$$(7.45) \quad U_0^{n+1} = U_N^{n+1} = 0$$

heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=1, N=50, lambda=0.51  
t = 0.009996

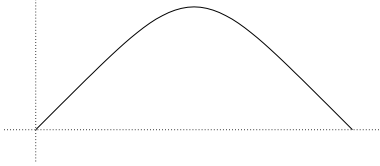


图 7.25:  $t = 0.009996$

heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=1, N=50, lambda=0.51  
t = 0.019992

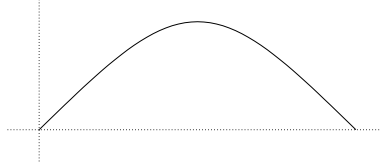


图 7.26:  $t = 0.019992$

heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=1, N=50, lambda=0.51  
t = 0.029988

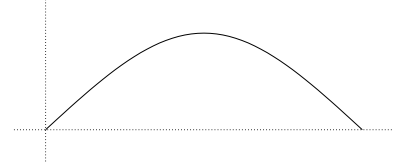


图 7.27:  $t = 0.029988$

heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=1, N=50, lambda=0.51  
t = 0.039984

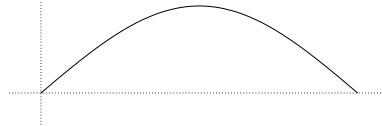


图 7.28:  $t = 0.039984$

heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=1, N=50, lambda=5  
t = 0.01

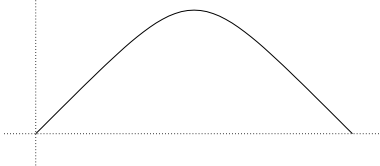


图 7.29:  $t = 0.01$

heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=1, N=50, lambda=5  
t = 0.02

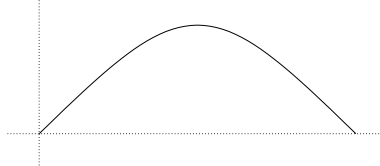


图 7.30:  $t = 0.02$

heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=1, N=50, lambda=5  
t = 0.03

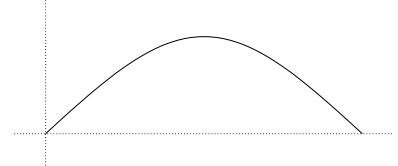


图 7.31:  $t = 0.03$

heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=1, N=50, lambda=5  
t = 0.04

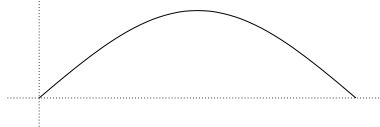


图 7.32:  $t = 0.04$

であるから、2 個の未知数  $U_0^{n+1}$ ,  $U_N^{n+1}$  は消去することができて、次のような  $N - 1$  個の未知数  $\{U_i^{n+1}; 1 \leq i \leq N - 1\}$  に関する  $N - 1$  個の連立 1 次方程式を得る。

$$(7.46) \quad \begin{pmatrix} 1 + 2\theta\lambda & -\theta\lambda & & & & & & & & 0 \\ -\theta\lambda & 1 + 2\theta\lambda & -\theta\lambda & & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & -\theta\lambda & 1 + 2\theta\lambda & -\theta\lambda & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & -\theta\lambda & 1 + 2\theta\lambda & -\theta\lambda & & \\ 0 & & & & & & & -\theta\lambda & 1 + 2\theta\lambda & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_i^{n+1} \\ \vdots \\ U_{N-2}^{n+1} \\ U_{N-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{1 - 2(1 - \theta)\lambda\}U_1^n + (1 - \theta)\lambda(U_0^n + U_2^n) \\ \{1 - 2(1 - \theta)\lambda\}U_2^n + (1 - \theta)\lambda(U_1^n + U_3^n) \\ \dots \\ \{1 - 2(1 - \theta)\lambda\}U_i^n + (1 - \theta)\lambda(U_{i-1}^n + U_{i+1}^n) \\ \dots \\ \{1 - 2(1 - \theta)\lambda\}U_{N-2}^n + (1 - \theta)\lambda(U_{N-3}^n + U_{N-1}^n) \\ \{1 - 2(1 - \theta)\lambda\}U_{N-1}^n + (1 - \theta)\lambda(U_{N-2}^n + U_N^n) \end{pmatrix}.$$

この方程式は後述するガウスの消去法などの方法によって解くことができる。

この公式を用いる方法を  $\theta$  法とよぶ。特に  $\theta = 1/2$  の場合は **Crank-Nicolson** (クランク-ニコルソン) の公式とよばれ、よく使われる (ルーツは記念碑的論文 Crank-Nicolson [2])。

## 7.6 熱伝導方程式以外の問題

ここまで熱伝導方程式のみ扱ってきたが、差分法の原理そのものは、より広い範囲の問題に適用できることは明らかであろう。熱伝導方程式を解くために第 6 章で学んだフーリエの変数分離の方法は強力であるが、重ね合わせの原理が成立するような問題、すなわち線形同次の問題にしか適用できない。このうち同次性自体は、成立しなくても取り扱う方法がないでもないが、線形性の要請は本質的である。たとえば

$$(7.47) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + ku(x, t)(1 - u(x, t)) \quad (t > 0, 0 < x < 1) \\ u_x(t, 0) &= -1, \quad u(t, 1) = 0 \quad (t > 0) \\ u(0, x) &= f(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \end{aligned}$$

のような非線形の問題をフーリエの方法で解くことは不可能であるが、差分法を用いて、とりあえず数値的に解くことはさして困難ではない。たとえば、

$$(7.48) \quad \begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} &= (1 - \theta) \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} \\ &+ \theta \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2} + kU_i^n(1 - U_i^n) \end{aligned}$$

のような差分方程式を作ればよい。非線形偏微分方程式の研究にはコンピューター・シミュレーションの果たす役割が大きくなる所以である。

## 7.7 補足

### (1) ランダウ (Landau) の記号 $O(\cdot)$ , $o(\cdot)$ について

この章の中で何回か、 $O(h)$  ( $h \rightarrow 0$ ) とか  $o(n^{-k})$  ( $n \rightarrow \infty$ ) のような記号を用いた。これはランダウの記号と呼ばれ、広く使われているが、念のために解説しておこう。

大きな  $O(\cdot)$  十分大きい正の定数  $C$  を取ると、 $\alpha$  に十分近い任意の  $x$  に対して

$$(7.49) \quad |f(x)| \leq C|g(x)|$$

が成り立つとき<sup>4</sup>、このことを記号

$$(7.50) \quad f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow \alpha)$$

で表し<sup>5</sup>、 $\alpha$  において  $f$  が  $g$  で押さえられる、という。

小さな  $o(\cdot)$  条件

$$(7.51) \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

が成り立つことを、記号

$$(7.52) \quad f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow \alpha)$$

で表す。

例  $f$  が  $a$  において微分可能で、微分係数が  $A$  であるとは、

$$(7.53) \quad A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が成り立つことであるが、この条件は

$$(7.54) \quad f(a+h) - f(a) - Ah = o(h) \quad (h \rightarrow 0)$$

のように書き直すことが出来る。また関数  $f$  が  $C^k$  級であるとき、テイラーの定理から

$$(7.55) \quad f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}h^{k-1} + \frac{f^{(k)}(a+\theta h)}{k!}h^k$$

となる  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ) が存在することが示されるが、この式から導かれる

$$(7.56) \quad f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}h^{k-1} + O(h^k) \quad (h \rightarrow 0)$$

はしばしば使われる。

注意 これらの記号は  $\alpha$  が実数でなく無限大  $\pm\infty$  の場合にも使われる。例えば

$$\frac{x^2 + x + 1}{x} = O(x) \quad (x \rightarrow \infty).$$

<sup>4</sup> $D$  を  $f$  の定義域とすると、論理式で書くと、 $\exists C > 0, \exists \varepsilon > 0, \forall x \in B(\alpha; \varepsilon) \cap D \quad |f(x)| \leq C|g(x)|$ .

<sup>5</sup>蛇足: 由緒正しい記号であるが、本当は  $f(x) \in O(g(x))$  のように書く方が筋が通っている、という人もいる。 $O(g(x))$  は1つのイデアルだ、とも。そのうちこの辺の記号は「現代化」されるかも知れない。



## (2) 対数グラフの読み方

第 7.4 節 (1) で、理工学の世界では常套手段である、変数の対数を目盛りを取ったグラフ — 対数グラフ — を用いた。これについて簡単に説明しておこう。

二つの変数  $x, y$  の間に  $y = ax + b$  ( $a, b$  は定数) のような 1 次のある場合は、そのことを確認するにはグラフを書いて直線になることをみればよく、グラフの傾きが  $a$  となる、というのは中学校以来の常識である。

それでは  $y = bx^a$  ( $a, b$  は定数,  $b > 0$ ) のような関係のある場合は、どうすればよいだろうか？ こういう場合に役立つのが対数グラフである。  $y = bx^a$  の両辺の対数を取ると、

$$(7.57) \quad \log y = \log bx^a = a \log x + \log b.$$

そこで  $Y = \log y, B = \log b, X = \log x$  とおくと、

$$Y = aX + B.$$

これは  $X, Y$  の間に 1 次のある関係が成り立つことを示している。よって  $x, y$  の対数  $X, Y$  をプロットすると、傾き  $a$  の直線になるはずである。

熱伝導方程式を差分法で解いた場合、分割数を  $N$  としたときの誤差  $E$  は、近似的に  $E = C/N^2$  ( $C$  は定数) の形の関係を満たすので、この場合、横軸を  $\log N$ , 縦軸を  $\log E$  として、データをプロットすると、傾き  $-2$  の直線上に乗ることになる。

## (3) 熱伝導方程式の解の指数関数的減衰

ディリクレ境界条件の場合の解  $u$  について、

$$(7.58) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0,$$

ノイマン境界条件の場合の解  $u$  について、

$$(7.59) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \frac{a_0}{2} \equiv \int_0^1 f(x) dx$$

であると述べたが、証明をしておこう。どちらでも同様であるから、(7.58) だけ考える。解の減衰 (0 へ収束すること) は、公式

$$(7.60) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n \pi x$$

において、 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-n^2 \pi^2 t} = 0$  であることから、明らかのようにであるが、

$$(7.61) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n \pi x = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n \pi x$$

のような無限和を取る操作  $\sum_{n=1}^{\infty}$  と、極限を取る操作  $\lim_{t \rightarrow \infty}$  の順序の可換性は一般には成り立たないことであるから、証明を要することである。ただ 0 に収束することを示すだけならば、級数が一様収束していることを証明すればよいが、せっかくだから、より詳しい結果を導こう。

補題 1 任意に  $t_0 > 0$  を固定するとき、

$$(7.62) \quad |u(x, t)| \leq C e^{-\pi^2 t} \quad (t \geq t_0, 0 \leq x \leq 1)$$

を満たす定数  $C$  が存在する。

関数  $f(t)$  が、ある正数  $C, \tau$  に対し、

$$(7.63) \quad |f(t)| \leq C e^{-t/\tau} \quad (\text{十分大きい任意の } t)$$

のように減少する指数関数  $C e^{-t/\tau}$  で上から評価されるとき、「 $f(t)$  は指数関数的に減衰する」という。

補題を認めれば  $t \rightarrow \infty$  の時、 $u(x, t)$  が 0 に収束するだけでなく、それが指数関数的に減衰していることが分かる。

補題の証明  $|f|$  は連続であるから、 $M := \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$  が定まる。 $b_n$  の定義式

$$(7.64) \quad b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx$$

から

$$(7.65) \quad |b_n| \leq 2 \int_0^1 |f(x) \sin n\pi x| \, dx \leq 2 \int_0^1 M \cdot 1 \, dx = 2M \int_0^1 dx = 2M.$$

したがって、 $|b_n|$  は  $n$  によらない定数  $2M$  で上から押さえられることが分かった。次に

$$(7.66) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x$$

であるから

$$(7.67) \quad \begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (2M \cdot e^{-n^2 \pi^2 t} \cdot 1) = 2M \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} \\ &= \left( 2M \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n^2-1)\pi^2 t} \right) e^{-\pi^2 t}. \end{aligned}$$

ゆえに  $t \geq t_0$  とすると

$$(7.68) \quad |u(x, t)| \leq \left( 2M \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n^2-1)\pi^2 t_0} \right) e^{-\pi^2 t}.$$

そこで

$$(7.69) \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n^2-1)\pi^2 t_0}$$

が収束することを示せばよいが、これは

$$(7.70) \quad e^{-(n^2-1)\pi^2 t_0} \leq e^{-(n-1)\pi^2 t_0} = r^{n-1}, \quad r = e^{-\pi^2 t_0} < 1$$

より、収束する等比級数  $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ ,  $0 < r < 1$  を優級数を持つことから明らかである。 ■

#### (4) 連立 1 次方程式 (7.46) が解けること

5 節 (3) の陰解法を実行するためには、連立 1 次方程式 (7.46) を解いて  $\{U_i^{n+1}\}$  を求めなければならないが、これが可能であること (可解性, より強く一意可解性) を確かめよう。これは  $N-1$  個の未知数に関する  $N-1$  個の 1 次方程式であるから、係数行列が正則であることを示せばよい。

一般に、 $n$  次の正方行列  $A = (a_{ij})$  に対して

$$(7.71) \quad |a_{ii}| > \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

が成り立つとき、すなわち、行列の各行において、対角成分の絶対値が他の成分の絶対値の和よりも大きいとき、 $A$  は狭義優対角であるという。

5.3 節の連立 1 次方程式の係数行列は狭義優対角である。実際、最初の行と最後の行については明らかである。また、それ以外の各行については、対角成分は  $1 + 2\theta\lambda$  で、他の成分で 0 でないものは  $-\theta\lambda, -\theta\lambda$  の二つだけであり、

$$(7.72) \quad |1 + 2\theta\lambda| - |-\theta\lambda| - |-\theta\lambda| = 1 + 2\theta\lambda - 2(\theta\lambda) = 1 > 0$$

となるから。それゆえ、次の定理を用いると、係数行列の正則性、ひいては連立 1 次方程式の可解性が分かる。

**定理 1** 任意の狭義優対角行列は正則である。

**証明** 背理法による。狭義優対角行列  $A = (a_{ij})$  が正則でないと仮定すると、 $Ax = 0$  を満たすベクトル  $x (\neq 0)$  がある<sup>6</sup>。

$$(7.73) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とし、絶対値最大の成分を  $x_k$  とする。方程式  $Ax = 0$  の第  $k$  成分を書くと

$$(7.74) \quad \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = 0.$$

この等式の左辺の第  $k$  項のみ残して、残りは右辺に移項すると

$$(7.75) \quad a_{kk}x_k = -\sum_{j \neq k} a_{kj}x_j.$$

絶対値を取って、

$$(7.76) \quad |a_{kk}||x_k| = \left| -\sum_{j \neq k} a_{kj}x_j \right| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_j| \leq \left( \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \right) |x_k|.$$

両辺を  $|x_k| (> 0)$  で割算して

$$(7.77) \quad |a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{jk}|.$$

これは行列  $A$  が狭義優対角であるという仮定に矛盾する。■

<sup>6</sup> 「任意の  $n$  次の実正方行列  $A$  と、 $A$  により定まる線型写像  $f: \mathbf{R}^n \ni x \mapsto Ax \in \mathbf{R}^n$  に対して、以下の条件は互いに同値である。(i)  $A$  は正則である ( $A^{-1}$  が存在する), (ii)  $f$  は全単射である, (iii)  $f$  は単射である, (iv)  $f$  は全射である, (v)  $\ker f = \{0\}$ , (vi)  $\text{rank } f = n$ , (vii)  $\det A \neq 0$ .」 — この定理の証明の鍵は、次元定理「 $n - \dim \ker f = \text{rank } f$ 」である (これは準同型定理の系ですね)。

## (5) 差分分解の厳密解への収束の証明

ここでは熱伝導方程式の初期値境界値問題 (7.9)-(7.11) に差分法を適用することの正当性を保証する定理を与える。具体的には差分分解の厳密解への収束と差分分解の安定性を示す。

**定理 2 (差分分解の厳密解への収束)** 任意に正数  $T$  を固定して、(7.9)-(7.11) を  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T$  で考える。解  $u$  は十分に滑らかであり、定数パラメーター  $\theta$  と  $\lambda$  が次の2つの条件のいずれかを満たすと仮定する。

$$(i) \quad 0 \leq \theta < 1, 0 < \lambda \leq \frac{1}{2(1-\theta)}.$$

$$(ii) \quad \theta = 1, \lambda > 0.$$

このとき、 $\theta$  法による差分分解  $\{U_i^n\}_{0 \leq i \leq N, n \geq 0}$  について、次式が成り立つ:

$$(7.78) \quad \max_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq n \leq J}} |U_i^n - u_i^n| = O(\tau + h^2) \quad (N \rightarrow \infty).$$

ただし  $u_i^n = u(x_i, t_n)$  で、 $J$  は  $T/\tau$  の整数部分であるとする。ゆえに  $N \rightarrow \infty$  とすれば

$$(7.79) \quad \max_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq n \leq J}} |U_i^n - u_i^n| \rightarrow 0.$$

条件 (7.79) のことを、差分分解の厳密解への収束とよぶ。

なお、差分分解の安定性は、次の定理<sup>7</sup>から分かる。

**定理 3 (離散最大値原理)** 数列  $\{U_i^n; 0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq J\}$  が、差分方程式

$$(7.80) \quad \begin{aligned} (1 + 2\theta\lambda)U_i^{n+1} - \theta\lambda(U_{i-1}^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}) \\ = [1 - 2(1-\theta)\lambda]U_i^n + (1-\theta)\lambda(U_{i-1}^n + U_{i+1}^n) \\ (1 \leq i \leq N-1, 0 \leq n \leq J-1) \end{aligned}$$

の解であり、さらに定数パラメーター  $\theta, \lambda$  が次の2つの条件のいずれかを満たすと仮定する。

$$(i) \quad 0 \leq \theta < 1, 0 < \lambda \leq \frac{1}{2(1-\theta)}.$$

$$(ii) \quad \theta = 1, \lambda > 0.$$

このとき、次の等式が成り立つ:

$$(7.81) \quad \max_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq n \leq J}} U_i^n = \max \left\{ \max_{0 \leq k \leq N} U_k^0, \max_{0 \leq \ell \leq J} U_0^\ell, \max_{0 \leq \ell \leq J} U_N^\ell \right\}.$$

**定理 2 の証明** 第 7.2 節に述べたことから

$$(7.82) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = u_t(x_i, t_n) + O(\tau),$$

<sup>7</sup>熱方程式の初期値境界値問題の解について、「最大値原理」と呼ばれる定理が成立するが、この定理はその離散化版と言うべきものになっている。

$$(7.83) \quad \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} = u_{xx}(x_i, t_n) + O(h^2).$$

これから

$$(7.84) \quad \begin{aligned} & \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} \\ &= u_t(x_i, t_j) - u_{xx}(x_i, t_j) + O(\tau + h^2) \\ &= O(\tau + h^2). \end{aligned}$$

ここで  $u$  は熱伝導方程式  $u_t = u_{xx}$  を満たすことを用いた。同様にして

$$(7.85) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2} = O(\tau + h^2).$$

以上から、 $\{u_i^n\}$  は差分方程式を近似的に満たすことが分かる:

$$(7.86) \quad \begin{aligned} & (1 + 2\theta\lambda)u_i^{n+1} - \theta\lambda(u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}) \\ &= [1 - 2(1 - \theta)\lambda]u_i^n + (1 - \theta)\lambda(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) + O(\tau^2 + \tau h^2). \end{aligned}$$

(この式は  $1 \leq i \leq N - 1$ ,  $0 \leq n \leq J - 1$  なる  $(i, n)$  に対して成り立つ。以下現れる方程式、不等式でも同様であるが、一々断らないことにする。) もちろん差分分解  $U_i^n$  は (その定義によって) 差分方程式

$$(7.87) \quad (1 + 2\theta\lambda)U_i^{n+1} - \theta\lambda(U_{i-1}^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}) = [1 - 2(1 - \theta)\lambda]U_i^n + (1 - \theta)\lambda(U_{i-1}^n + U_{i+1}^n)$$

を厳密に満たすから、 $e_i^n := U_i^n - u_i^n$  とおくと、 $e_i^n$  は

$$(7.88) \quad \begin{aligned} & (1 + 2\theta\lambda)e_i^{n+1} - \theta\lambda(e_{i-1}^{n+1} + e_{i+1}^{n+1}) \\ &= [1 - 2(1 - \theta)\lambda]e_i^n + (1 - \theta)\lambda(e_{i-1}^n + e_{i+1}^n) + O(\tau^2 + \tau h^2) \end{aligned}$$

を満たす。パラメーター  $\theta, \lambda$  に関する仮定から、係数  $1 + 2\theta\lambda, \theta\lambda, 1 - 2(1 - \theta)\lambda, (1 - \theta)\lambda$  はいずれも 0 以上になることに注意しよう。すると、

$$(7.89) \quad \begin{aligned} & (1 + 2\theta\lambda)|e_i^{n+1}| - \theta\lambda(|e_{i-1}^{n+1}| + |e_{i+1}^{n+1}|) \\ &\leq [1 - 2(1 - \theta)\lambda]|e_i^n| + (1 - \theta)\lambda(|e_{i-1}^n| + |e_{i+1}^n|) + C(\tau^2 + \tau h^2). \end{aligned}$$

ここで  $C$  は十分大きな定数である。

いま  $E^n := \max_{0 \leq i \leq N} |e_i^n|$  とおくと、

$$(7.90) \quad \begin{aligned} & (1 + 2\theta\lambda)|e_i^{n+1}| - 2\theta\lambda E^{n+1} \leq (1 + 2\theta\lambda)|e_i^{n+1}| - \theta\lambda(|e_{i-1}^{n+1}| + |e_{i+1}^{n+1}|) \\ &\leq [1 - 2(1 - \theta)\lambda]|e_i^n| + (1 - \theta)\lambda(|e_{i-1}^n| + |e_{i+1}^n|) + C(\tau^2 + \tau h^2) \\ &\leq [1 - 2(1 - \theta)\lambda]E^n + 2(1 - \theta)\lambda E^n + C(\tau^2 + \tau h^2) \\ &= E^n + C(\tau^2 + \tau h^2). \end{aligned}$$

$e_0^{n+1} = e_N^{n+1} = 0$  に注意して、 $i$  を  $1 \leq i \leq N - 1$  の範囲で動かして、左辺の最大値をとると

$$(7.91) \quad (1 + 2\theta\lambda)E^{n+1} - 2\theta\lambda E^{n+1} \leq E^n + C(\tau^2 + \tau h^2).$$

すなわち

$$(7.92) \quad E^{n+1} \leq E^n + C(\tau^2 + \tau h^2).$$

この式を繰り返し用いると、

$$\begin{aligned}
 (7.93) \quad E^n &\leq E^{n-1} + C(\tau^2 + \tau h^2) \\
 &\leq E^{n-2} + 2C(\tau^2 + \tau h^2) \\
 &\quad \dots \\
 &\leq E^0 + nC(\tau^2 + \tau h^2) = nC(\tau^2 + \tau h^2).
 \end{aligned}$$

ここで、任意の  $i$  に対して  $e_i^0 = U_i^0 - u_i^0 = f(x_i) - f(x_i) = 0$  であるから  $E^0 = 0$  となることを用いた。

ゆえに  $n\tau \leq J\tau \leq T$  に注意すれば

$$(7.94) \quad E^n \leq CT(\tau + h^2).$$

これから

$$(7.95) \quad \max_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq n \leq J}} |U_i^n - u_i^n| \leq CT(\tau + h^2). \quad \blacksquare$$

定理 3 の証明 (7.81) において、左辺はすべての  $U_i^n$  の最大値で、右辺は一部分の最大値であるから、左辺  $\geq$  右辺は明らかである。以下、左辺  $\leq$  右辺を示そう。このために、まず  $0 \leq n \leq J-1$  なるすべての  $n$  に対して

$$(7.96) \quad \max_{0 \leq i \leq N} U_i^{n+1} \leq \max \left\{ \max_{0 \leq k \leq N} U_k^n, U_0^{n+1}, U_N^{n+1} \right\}.$$

が成り立つことを示す。そのために

$$(7.97) \quad \max_{1 \leq i \leq N-1} U_i^{n+1} \leq \max_{0 \leq k \leq N} U_k^n$$

が成り立つことを示す。左辺の最大値が  $i = i_0$  で達成される、すなわち  $\max_{1 \leq i \leq N-1} U_i^{n+1} = U_{i_0}^{n+1}$  であると仮定しよう。このとき (7.80) を  $i = i_0$  に対して考える：

$$(7.98) \quad (1 + 2\theta\lambda)U_{i_0}^{n+1} - \theta\lambda(U_{i_0-1}^{n+1} + U_{i_0+1}^{n+1}) = (1 - 2(1 - \theta)\lambda)U_{i_0}^n + (1 - \theta)\lambda(U_{i_0-1}^n + U_{i_0+1}^n).$$

パラメーター  $\theta, \lambda$  に関する仮定から、係数  $1 + 2\theta\lambda, \theta\lambda, 1 - 2(1 - \theta)\lambda, (1 - \theta)\lambda$  はいずれも 0 以上になることに注意しよう。すると、

$$\begin{aligned}
 (7.99) \quad (7.98) \text{ の右辺} &\leq \{1 - 2(1 - \theta)\lambda\} \max_{0 \leq k \leq N} U_k^n + (1 - \theta)\lambda \left( \max_{0 \leq k \leq N} U_k^n + \max_{0 \leq k \leq N} U_k^n \right) \\
 &= \{[1 - 2(1 - \theta)\lambda] + 2(1 - \theta)\lambda\} \max_{0 \leq k \leq N} U_k^n \\
 &= \max_{0 \leq k \leq N} U_k^n.
 \end{aligned}$$

一方

$$(7.100) \quad (7.98) \text{ の左辺} \geq (1 + 2\theta\lambda)U_{i_0}^{n+1} - \theta\lambda\{U_{i_0-1}^{n+1} + U_{i_0+1}^{n+1}\} = U_{i_0}^{n+1}.$$

(7.99), (7.100) によって  $U_{i_0}^{n+1} \leq \max_{0 \leq k \leq N} U_k^n$ . すなわち (7.97) が得られる：

$$(7.101) \quad \max_{1 \leq i \leq N-1} U_i^{n+1} \leq \max_{0 \leq k \leq N} U_k^n.$$

これから (7.96) が成り立つことが分かる。(7.96) を  $n = 0$  として適用すると、

$$(7.102) \quad \max_{0 \leq i \leq N} U_i^1 \leq \max \left\{ \max_{0 \leq k \leq N} U_k^0, U_0^1, U_N^1 \right\}.$$

さらに (7.96) を  $n = 1$  として適用すると、

$$(7.103) \quad \max_{0 \leq i \leq N} U_i^2 \leq \max \left\{ \max_{0 \leq k \leq N} U_k^1, U_0^2, U_N^2 \right\}.$$

(7.102), (7.103) から

$$(7.104) \quad \max_{0 \leq i \leq N} U_i^2 \leq \max \left\{ \max_{0 \leq k \leq N} U_k^0, U_0^1, U_0^2, U_N^1, U_N^2 \right\} = \max \left\{ \max_{0 \leq k \leq N} U_k^0, \max_{1 \leq \ell \leq 2} U_0^\ell, \max_{1 \leq \ell \leq 2} U_N^\ell \right\}$$

以下この操作を繰り返すと、 $n = 1, 2, \dots, J$  に対して

$$(7.105) \quad \max_{0 \leq i \leq N} U_i^n \leq \max \left\{ \max_{0 \leq k \leq N} U_k^0, \max_{1 \leq \ell \leq n} U_0^\ell, \max_{1 \leq \ell \leq n} U_N^\ell \right\}$$

が示される。このことから (7.81) の左辺  $\leq$  右辺が分かる。■

## (6) ガウス (Gauss) の消去法のアルゴリズム

連立 1 次方程式の解法として、線形代数の教科書には クラームル (Cramer) の公式や掃き出し法 (Jordan の消去法ともいう) が説明されていることが多いが、ガウスの消去法は、掃き出し法を改良したものである<sup>8</sup>。

例として次の方程式を取りあげて説明しよう。

$$(7.106) \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

掃き出し法では係数行列と右辺のベクトルを並べた行列を作り、それに

1. ある行に 0 でない定数をかける。
2. 2つの行を入れ換える。
3. ある行に別の行の定数倍を加える。

のような操作 — 行に関する基本変形と呼ぶ — をほどこして、連立方程式の係数行列に相当する部分を単位行列にするのであった。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{15}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \end{aligned}$$

<sup>8</sup>見方によっては、ガウスの消去法は中学校で習う加減法 (初めて習う解法!) そのものであり、大学の線形代数で習う解法は、実用性では退化していると言えなくもない(?)。

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{ゆえに} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

ガウスの消去法も、前半の段階はこの方法に似ていて、同様の変形を用いて掃き出しを行なうのだが、以下のように対角線の下側だけを 0 にする。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{pmatrix}.$$

最後の行列は

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \quad -2x_2 - x_3 = -7, \quad -5x_3 = -15$$

ということを表しているので、後の方から順に

$$x_3 = \frac{-15}{-5} = 3, \quad x_2 = \frac{-7 + x_3}{-2} = 2, \quad x_1 = \frac{5 - 3x_2 + x_3}{2} = \frac{5 - 3 \times 2 + 3}{2} = 1$$

と解くことが出来る。前半の対角線の下側を 0 にする掃き出しの操作を前進消去 (forward elimination)、後半の代入により解の値を求める操作を後退代入 (backward substitution) と呼ぶ。

以下簡単に 3 つの方法の比較をしよう。

クラームルの公式を適用するには  $n + 1$  個の行列式を求める必要があるため、計算の手間がかかる (大きな計算量が必要になる、という)。実際、行列式を一つ計算するための手間は、連立方程式を一つ解くための手間と本質的に同等であることが分かっているので、クラームルの公式を使うことに固執すると、本来必要な計算量の  $n$  倍程度の計算をする羽目になり、大変な損をすることになる (差分法に応用する場合には、 $n$  が非常に大きな数になることに注意しよう)。そのため、実際の数値計算では、ごく特殊な例を除いて、クラームルの公式が利用されることはない。クラームルの公式は、理論的な問題を扱う場合に、真価が発揮されるものである。

このクラームルの方法に比べれば、掃き出し法は、かなりの実用性を持っているが、第 7.5 節の方程式のように、係数行列が三重対角行列の場合には、ガウスの消去法の方が断然有利である。それは、ガウスの消去法を採用すると、掃き出しの途中に現れる行列が三重対角のままであることから、計算量が少なくすむためである。

問 第 7.5 節の方程式で、 $n$  が 5, 6 程度の小さい場合に、簡単のため  $\theta\lambda = 1$  として、掃き出し法とガウスの消去法を手計算で実行して計算の手間について比較せよ。

## 7.8 おまけ: 差分法をこの後学ぶために

1. 非同次境界条件、Neumann 境界条件の場合の差分方程式  
→ 『熱方程式に対する差分法 I』 [3]
2. 差分スキームの、行列を使った安定性の解析, von Neumann の安定性解析  
→ 『発展系の数値解析の続き』 [4], 『熱方程式に対する差分法 I』 [3]
3. LU 分解の理論、Gauss の消去法の実際  
→ 『発展系の数値解析の続き』 [4], 『連立 1 次方程式 1』 [5]
4. 波動方程式に対する差分法  
→ 『波動方程式に対する差分法』 [6]



5. この文書を書くにあたって主に参考にしたもの  
菊地・山本, 『微分方程式と計算機演習』 [7]
6. 半線型放物型方程式に対する差分法について、特に勧めたいもの  
齊藤 宣一, 『線形・非線形放物型方程式の差分解法と可視化』 [8]
7. 古典的 (?) 文献  
Richtmyer-Morton [9], フォーサイス・ワソー [10], Smith [11], 山口・野木 [12]

## 関連図書

- [1] 桂田祐史：微分方程式2 講義ノート (旧「応用解析 II」), <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/pde/pde2013.pdf> (1997年～).
- [2] Crank, J. and Nicolson, P.: A Practical Method for Numerical Evaluation of Solutions of Partial Differential Equations of the Heat-Conduction Type, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 43, pp. 50–67 (1947), <http://www.springerlink.com/content/g43649440307j807/> から reprint が入手可能.
- [3] 桂田祐史：熱方程式に対する差分法 I — 区間における熱方程式 —, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/heat-fdm-1.pdf> (1998年～).
- [4] 桂田祐史：発展系の数値解析の続き, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/heat-fdm-0-add.pdf> (1997年～).
- [5] 桂田祐史：連立1次方程式I, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/linear-eq-1.pdf> (2002年～).
- [6] 桂田祐史：波動方程式に対する差分法, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/wave.pdf> (1999年?～).
- [7] 菊地文雄, 山本昌宏：微分方程式と計算機演習, 山海堂 (1991).
- [8] 齊藤宣一：線形・非線形放物型方程式の差分法と可視化, 明治大学大学院理工学研究科で行われた集中講義の講義ノートで, <http://infsup.jp/> から入手可能 (2006).
- [9] Richtmyer, R. D. and Morton, K. W.: *Difference Methods for Initial-Value Problems*, Krieger Pub Co, 2nd edition (1994).
- [10] フォーサイス, ワソー：偏微分方程式の差分法による近似解法 (上), (下), 吉岡書店 (1968), *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations* (1960) の翻訳 (藤野 精一訳).
- [11] Smith, G. D.: *Numerical solution of partial differential equations third edition*, Clarendon Press Oxford (1986), 第一版の邦訳が G. D. スミス著, 藤川洋一郎訳, コンピュータによる偏微分方程式の解法 新訂版, サイエンス社 (1996) である.
- [12] 山口昌哉, 野木達夫<sup>まさや</sup>：数値解析の基礎, 共立出版 (1969), 2009年「復刊 数値解析の基礎」というタイトルで出版されました.