

ピタゴラスの鍛冶屋でのエピソードの検証

明治大学 総合数理学部 4 年
高原 智輝

2018/02/15

1 はじめに

1.1 きっかけ

今回の卒業論文を作成するにあたって、私は「数学と音楽の関連性」というものを重視していた。数学と音楽は常に密接な関係性にあると常日頃感じるからである。小学4年時に吹奏楽部でトロンボーンという楽器を始めて以来音楽を続けてきた自分のこだわりでもあった。その中でも特に「音階」というものに着眼点を置き、このテーマに決定した所存である。

1.2 テーマについて

ポエティウス(480頃-524頃)は著書の『音楽教程』の冒頭にピタゴラスが音程と数比の関係を発見した経緯を記している。(以下引用：<http://www.geocities.jp/ja1tmc/ongaku.html>)

何か神秘的な合図を得て鍛冶屋の仕事場の前を通りかかったときに、彼(ピタゴラス)は何本かのハンマーが打ち下ろされると、異なった、いくつかの音からただひとつの、ある仕方で調和した音が鳴り響くのを聴き分けた。だからそのようにして、彼は長い間探し求めていたものに突然遭遇したのである。彼は研究に着手し、長い間熟考した末に次の用に判断した。即ち、ハンマーを持つ人の力によって音の違いが生じる、と。そしてこのことがより明白になるようにと、ハンマーを互いに交換するよう命じた。だが、音の固有性は人の腕の力とは関係がなくて、交換された当のハンマーと一体になっていた、だから彼はそのことに気づいた時、ハンマーに重さを調べた。ハンマーはたまたま4本あったのだが、重さが2倍になっている2本のハンマーが見いだされた。そしてこの2本はオクターブの協和の仕方で互いに響きあっていた。また、あるハンマーの2倍の重さの同じハンマーに関しては、別のハンマーの4分の3を含んでおり、即ちこのハンマーに対しては4度で鳴り響いていた。同じハンマーと5度の協和によって組み合わせられるまた別のハンマーに対しては、上述のものの2倍の重さの当のハンマーは3:2である、ということを見いだした。これら2本のハンマーに対して、上述した2倍のハンマーは4:3および3:2であることが確かめられたが、この2本のハンマーは相互に対して9:8の比を保持する、ということが注意深く調べられたのである。他のすべてのハンマーと協和しない第5のハンマーは除外された。

さて、ピタゴラス以前にあるいはオクターブが、あるいは5度が、あるいは最小の協和(音程)である4度が音楽の協和と呼ばれていたのだが、ピタゴラスがはじめて、今述べたような仕方で、音のこの協和がどのような比と結びつけられるかを発見したのである。さらに今述べたことをより明らかにするために、仮に四本のハンマーの重さが以下に記された数即ち12,9,8,6によって含意されているものとしよう。12と6の重さに対応したこの2本のハンマーは、2倍の関係にあるオクターブの協和を鳴り響かせていた。重さ12のハンマー対重さ8のハンマーおよび重さ8のハンマー対重さ6のハンマーは4:3の比に即して4度の協和と結びつけられた。また、重さ9:6および12:8は5度の協和を鳴り響き合わせていた。9:8は9:8の比において全音を鳴り響かせていたのである。

ピタゴラスらはその後一弦琴を用いて後のピタゴラス音律と呼ばれる体系を確立させた。「しかし実際にはこの原理は楽器の弦の長さの比率においては正しいが、金槌の重さには当てはまらない。」Wikipedia『ピタゴラス音律』のページにはこのように記載してあるが、なぜ成り立たないのかの理由などについては言及されていないのである。そこで、ここでは「金槌の重さではこの原理は成り立たない」という仮説が本当であるかどうかについて、波動方程式などを用いて検証してみる。また、実際に同じ形で異なる重さの金属の物体を用いて実証する。

1.3 音楽用語

上述の文章にて幾つかわかりづらいであろう言葉が多く出てきていたので簡単にではあるが紹介しておきたい。

■**音律** 音楽で使う「音」とそれらの音程関係を、音響的・数学的に規定したものを「音律」(music temperament)と呼ぶ。「音律」では各音の絶対音高ではなく相対音高が基礎となる。つまり音の振動数そのものではなく、振動数の比率が問題になる。

■音階 実際の楽曲は、音律からさらに幾つかの音を選び出して、それを主に使う。使われている主要な音を1オクターブ内に音の高さの順に階段的に並べたものを「音階」(scale)と呼ぶ。

■5度、4度、全音 ハ長調「ド、レ、ミ、ファ、ソ、ラ、シ、ド」を例にとると、1番目のドとソの関係が5度、1番目のドとファの関係が4度になっている。全音とは半音2つ分の意。例えばピアノにおいては、ある白鍵の音の、黒鍵をまたいで隣の白鍵の音のこと。

2 3つの偏微分方程式

2.1 1次元の弦の振動を表す波動方程式

ピタゴラスが実際に弦を用いて実験した方法をまずは確認していく。両端を固定した長さ L の弦の振動の簡単なものを想定したとき、方程式は以下ようになる。

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} \quad (0 < x < L, 0 < t < \infty)$$

境界条件と初期条件はそれぞれ、

$$u(0, t) = 0, u(L, t) = 0 \quad (0 < t < \infty)$$

$$u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x) \quad (0 \leq x \leq L)$$

となる。まず、 $u(x, t) = X(x)T(t)$ という形の特殊解を求める。これを方程式に代入すると

$$X(x)T''(t) = \alpha^2 X''(x)T(t)$$

両辺を $\alpha^2 u_{xx}$ で割って

$$\frac{T''(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

x と t は互いに独立であるから、上式の値を定数 λ とおくと

$$\begin{cases} T'' - \alpha^2 \lambda T = 0 \\ X'' - \lambda X = 0 \end{cases}$$

という2つの常微分方程式が得られる。ここで、 $\lambda \geq 0$ の場合 X と T は非自明解を持たないので $\lambda < 0$ の場合について考える。よって、

$$X(x)T(t) = (A \sin \beta x + B \cos \beta x)(C \sin \alpha \beta t + D \cos \alpha \beta t)$$

が境界条件を満足するように A, B, C, D, λ を定める。ただし、 $\lambda = -\beta^2$ としている。境界条件 $u(0, t) = 0$ より

$$A \sin 0 + B \sin 0 = 0 \quad \therefore B = 0$$

さらに、 $u(L, t) = 0$ より

$$\sin \beta L = 0 \rightarrow \beta_n = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

である。よって、基本解 u_n は

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{L}x\right) \left\{ a_n \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{L}t\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi\alpha}{L}t\right) \right\}$$

最終的な解の形はこれらの線形結合で

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{L}x\right) \left\{ a_n \sin\left(\frac{n\pi\alpha}{L}t\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi\alpha}{L}t\right) \right\}$$

(ただし、 a_n と b_n は定数)

2.2 梁の振動 (4 階の偏微分方程式)

エピソードでの金槌を梁 (柱の上に張り渡し屋根を支える材) に見立て、周波数と質量の関係について調べる。まず、1次元での両端単純支持で長さ L の梁の振動は以下の偏微分方程式で記述される。

$$u_{tt} = -\alpha^2 u_{xxxx} \quad (0 < L < x, 0 < t < \infty)$$

境界条件と初期条件はそれぞれ、

$$\begin{aligned} u(0, t) = u_{xx}(u, t) = u(L, t) = u_{xx}(L, t) = 0 \quad (0 < t < \infty) \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x) \quad (0 \leq x \leq L) \end{aligned}$$

となる。以下簡単のため $\alpha = 1$ として計算を進める。

まず、 $u(x, t) = X(x)(A \sin \omega t + B \cos \omega t)$ として (3.2) に代入すると

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \omega^2 X(-A \sin \omega t - B \cos \omega t) \\ u_{xxxx} &= -X^{(4)}(A \sin \omega t + B \cos \omega t) \end{aligned}$$

この2式より、 $X^{(4)} - \omega^2 X = 0$ となる。この方程式の一般解は

$$X(x) = C \sin \sqrt{\omega} x + D \cos \sqrt{\omega} x + E \sinh \sqrt{\omega} x + F \cosh \sqrt{\omega} x$$

境界条件 $u(0, t) = X(0)T(t) = 0$ より

$$D + F = 0$$

となり、 $u_{xx}(0, t) = X''(x)T(t) = 0$ より

$$-D + F = 0$$

この2式から $D = F = 0$ となる。また、 $u(L, t) = 0$ より

$$C \sin L\sqrt{\omega} + E \sinh L\sqrt{\omega} = 0$$

となり、 $u_{xx}(L, t) = 0$ より

$$-C \sin L\sqrt{\omega} + E \sinh L\sqrt{\omega} = 0$$

この2式から $C \sin L\sqrt{\omega} = E \sinh L\sqrt{\omega} = 0$ となり、 $\sinh L\sqrt{\omega} > 0$ であるから $E = 0$

$$\sin L\sqrt{\omega} = 0 \rightarrow \omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となる。よって、基本解 u_n は

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left\{ a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t + b_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t \right\}$$

最終的な解の形はこれらの線形結合で

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left\{ a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t + b_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t \right\}$$

と表せる。ところで、長さ 1 と仮定してこの方程式を解いた時の固有値の集合 $\{(n\pi)^4\}$ を $\{\lambda_n\}$ とおくと、長さ L として解いた時の固有値の集合は $\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 = \left\{\frac{\lambda_n}{L^4}\right\}$ となり、固有値は L^{-4} に比例している。これが3次元においての方程式

$$\mathbf{u}_{tt}(x, y, z, t) = -\alpha \Delta^2 \mathbf{u}$$

においても成り立つとする。ここで

$$\Delta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2$$

である。前節で前述の通り周波数は固有値の平方根に比例するので、周波数は L^{-2} に比例する。また、相似な物体の質量比は相似比の3乗であるから、質量が k 倍の物体を振動させた時の周波数は $\left(\frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}\right)^2 = k^{-\frac{2}{3}}$ 倍になっているということになる。これはエピソードの内容とは一致しない。

2.3 等方弾性体の波動方程式

次に、エピソードでの金槌を等方弾性体として周波数と質量の関係について調べる。等方弾性体とは抵抗特性が同じで、材料特性が方向性を有していないものを指す。

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$ が等方弾性体の弾性波の方程式

$$\rho u_{tt} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u})$$

を満たすとき (ρ, μ, λ は正定数)、 $p := \text{div } \mathbf{u}$, $\mathbf{s} := \text{rot } \mathbf{u}$ はそれぞれ以下のような式を満たす

$$\rho u_{tt} = (\lambda + 2\mu) \Delta p \quad (\text{P 波の方程式})$$

$$\rho \mathbf{s}_{tt} = \mu \Delta \mathbf{s} \quad (\text{S 波の方程式})$$

この場合、弦の振動と同様に固有値は長さの 2 乗に反比例する。よって、前節と同様に比較すると質量が k 倍の等方弾性体を振動させたときの周波数は $\frac{1}{k^{\frac{1}{3}}} = k^{-\frac{1}{3}}$ 倍になっているということになる。これもエピソードの内容とは一致しない。

3 実験とまとめ

3.1 実験方法

釣具のおもり（鉛製）を金槌に見立てる。今回は 50 匁と 200 匁の物を用意した。ただし、1 匁は 3.75 グラムである。



上の写真では左が 50 匁のおもり、右が 200 匁のおもりになっている。それぞれを同じコンクリートの壁で打ち鳴らしたときの音を録り、周波数を調べ比較する。

3.2 結果

録音したそれぞれの音声データを Mathematica で離散フーリエ変換して絶対値をプロットしたところ、以下のようになった。

ピークの値が似たものになってしまい、実験としては失敗に終わってしまった。実際に打ち鳴らした時は音の高さの違いは分かったのだが、調べたい音の成分以外の成分が多く含まれてしまったためにピークの値が調べたい音とは異なるところに来てしまったと考えられる。

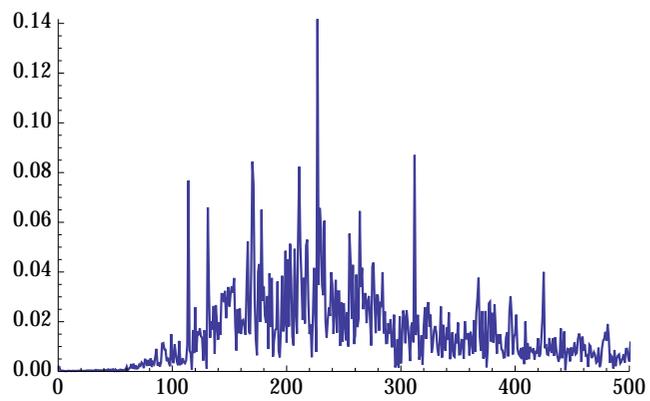


図1 50 匁のおもり

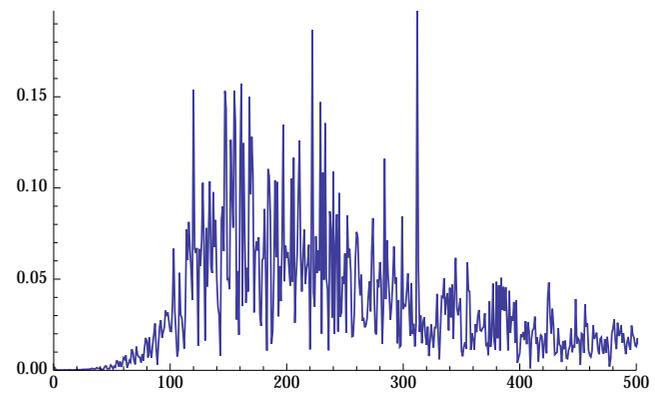


図2 200 匁のおもり

3.3 まとめ

以上から、エピソードにおいての金槌の質量と振動数の関係は弦の場合とは異なるということが言える。今後、偏微分方程式などを用いた実証方法や、周波数を実際に測定する実験方法などは改良していく余地が多々あると思われる。

4 参考文献

- ・スタンリー・ファーロウ (伊理正夫・伊理由美 訳,2015) 『偏微分方程式- 科学者・技術者のための使い方と解き方』朝倉書店
- ・E・オマール (伊理由美 訳,2008) 『ピタゴラスの定理- 4000 年の歴史』岩波書店
- ・馬場良始 (2012)「ピタゴラス音律- 小学校専門科目「数学」での実践」<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/ybaba/onritsu1.pdf>