現象数理ゼミナールI 演習

桂田 祐史

2016 年 7 月 22 日

1　ここまでの振り返り — はじめての Fourier の方法

輪講のテキストであるファーロウ [1] では、第 1 部の導入に続いて、第 2 部で拡散型の問題を扱い、Fourier によって発見された Fourier の方法を用いて、熱伝導方程式の初期値境界値問題

(1) $$u_t(x,t) = \alpha^2 u(x,t) \quad (0 < x < 1,\ 0 < t < \infty),$$

(2) $$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad (0 < t < \infty),$$

(3) $$u(x,0) = \phi(x) \quad (0 \le x \le 1)$$

について、次の解の公式を得た。

(4) $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\alpha n\pi)^2 t} \sin(n\pi x), \quad A_n = 2\int_0^1 \phi(x)\sin(n\pi x)\,dx.$$

覚えておいて欲しい

Fourier の方法は、今から 200 年ほど前に発見された方法であるが、偏微分方程式の問題のもっとも重要な解法と言っても過言ではない。第 2 部拡散型の問題 (放物型) の後の第 3 部双曲型の問題、第 3 部楕円型の問題でも活躍する。

でも、それだけでは不十分で数値計算が必要になる (第 4 部で少し触れられている)。

2　第 7 課の問題

問題 (1), (2), (3) は基本的である。多くの本に載っているのは、純粋に手計算だけで解が得られるためと考えられるが、これだけで済ませると、誤解が生じかねない。

第 7 課で取り上げられている問題 (5), (6), (7) は、一部コンピューターによる数値計算が必要になり、色々な意味で教育的であると思われる。

(5) $$u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad (0 < x < 1,\ 0 < t < \infty),$$

(6) $$u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) + hu(1,t) = 0 \quad (0 < t < \infty),$$

(7) $$u(x,0) = x \quad (0 \le x \le 1).$$

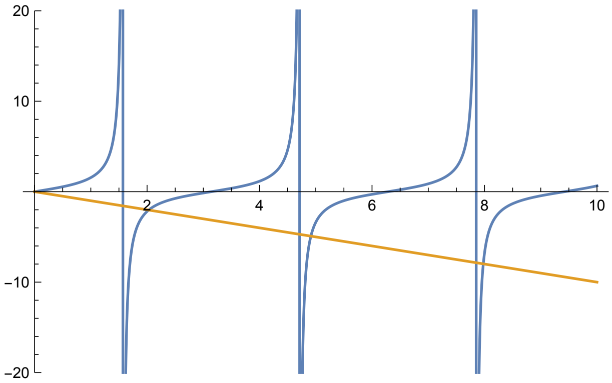

図 1: $\tan\lambda$ と $-\lambda/h$ の交点を示すグラフ $(h=1)$

```
g = Plot[{Tan[x], -x/h}, {x, 0, 10}, PlotRange -> {-20, 20}]
```

2.1 フーリエの方法のステップ 1 変数分離する

5 課の問題 (1), (2), (3) のときと同じで、$u(x,t)=X(x)T(t)$ について、

$$T'-\mu\alpha^2 T=0,$$
$$X''-\mu X=0$$

という微分方程式が導かれる。ここで μ はある定数で、$\mu=-\lambda^2$ と置き直される。

2.2 フーリエの方法のステップ 2 変数分離解を求める

変数分離解 $u(x,t)=e^{-(\lambda\alpha)^2 t}(A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x))$ の満たすべき境界条件が (2) から、(6) に変わったため、λ についての方程式が

$$\sin\lambda=0 \tag{8}$$

から

$$\lambda\cos\lambda+h\sin\lambda=0 \quad すなわち \quad \tan\lambda=-\frac{\lambda}{h} \tag{9}$$

に変わる。

(8) は $\lambda=-n^2$ $(n=1,2,\dots)$ と解けたが、(9) はどうすれば良いだろうか？

この方程式の解は簡単な式で表すことは出来ないが、中間値の定理から解が無限個存在することは分かる (テキスト図 7.3 の再現である図 1 を見よ)。正の解を大きさの順に

$$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots$$

と番号を付ける。番号 n が与えられとき、数値計算をすれば、λ_n を必要な精度で計算できる。

問 1. どういうアルゴリズムを使えば良いか？実際のプログラムは (例えば C 言語を用いて) どのように作れば良いか？

Mathematica では、方程式を解くために、`Solve[ ]`, `NSolve[ ]`, `FindRoot[ ]` などの関数が用意されている (こういう名前は知らなくても、色々検索できるであろう)。

問 2.

(1) Mathematica の各関数の機能を調べるにはどうしたら良いか。

(2) 今の場合、λ_n を求める方程式 (9) を解くために、どの関数を使うのが適当か。

(3) 方程式を解くための (反復法の) 初期値が必要になるが、何が良いか。
図 1 を見て λ_n の近似値が思いつくかどうか。

(4) テキスト表 7.1 の 10 個の結果をまとめて得るにはどうしたら良いか。

Mathematica で計算した結果 (表 7.1 と比較して末尾の桁まで一致)

```
{2.02876, 4.91318, 7.97867, 11.0855, 14.2074, 17.3364, 20.4692, 23.6043, 26.7409, 29.8786}
```

(4) についてのヒント。1 つのテクニックとして、複数の解を後で使うために、リストを作るという手がある。例えば、方程式 $x^3 - x^2 - 5x + 4 = 0$ の 3 つの解を `xs` という変数に記憶するには、

```
xs=x /. NSolve[x^3 - x^2 - 5 x + 4 == 0, x]
```

`NSolve[]` は解いた結果を `x` の置き換え規則の形で返す。`x /.` `x` の置き換え規則 とすると、解そのもの (のリスト) が得られる。

こうすると、`xs` は `{-2.16425, 0.772866, 2.39138}` というリストになり、`xs[[1]]` とすると、1 番目の要素 `-2.16425` が得られる。

後半戦　λ_n さえ求まれば、後は前と同様で、$A_n e^{-(\alpha n\pi)^2 t}\sin(n\pi x)$ に代わって

$$u_n(x,t) = a_n e^{-(\alpha\lambda_n)^2 t}\sin\left(\lambda_n x\right) \tag{10}$$

が変数分離解である。$n\pi$ が λ_n に置き換わっただけである。

そのために、手計算では解きにくくなっているが、大筋に変わりはない、という見方も出来る。

2.3　フーリエの方法 ステップ 3: 級数解の係数 a_n を求める

2.3.1　第 5 課の問題のステップ 3 の振り返り

第 5 課の問題 (1), (2), (3) を振り返る。ステップ 2 の $u_n(x,t) = A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x)$ を使って、

$$u(x,t) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t}\sin(n\pi x) \tag{11}$$

とおき、これを初期条件 (3) に代入して、

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) \quad (0 \le x \le 1)$$

という式を満たすように A_n を決定した。そのため、「数学とメディア」や「画像処理とフーリエ変換」で良く出て来た論法を用いる。

簡単のため $\varphi_n(x) = \sin(n\pi x)$ とおいて、内積 $(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ を使うと、

$$A_n = \frac{(\phi, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}.$$

今の場合、$(\varphi_n, \varphi_n) = \frac{1}{2}$, $(\phi, \varphi_n) = \int_0^1 \phi(x)\sin(n\pi x)dx$ であるから、

$$A_n = 2\int_0^1 \phi(x)\sin(n\pi x)dx.$$

これで (1), (2), (3) の解 (4) が得られた。

2.3.2　第 7 課の問題を解く

では、(1), (6), (7) の場合を考える。

(11) については、u_n をステップ 2 で求めたもの (10) で置き換えて

$$u(x,t) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\alpha\lambda_n)^2 t}\sin(\lambda_n x)$$

とすれば良いだろう ($n\pi$ が λ_n に変わった, また係数 A_n は a_n と文字を変えている —神経が細かい著者だ)。(7) に代入して

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\lambda_n x) \quad (0 \le x \le 1)$$

係数 a_n の求め方も、筋は上と同じで $\varphi_n(x) = \sin(\lambda_n x)$ とおくと、

$$a_n = \frac{(x, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}$$

となる (φ_n で表すと前と同じである)。より具体的に表すと

$$a_n = \frac{\displaystyle\int_0^1 x\sin(\lambda_n x)\,dx}{\displaystyle\int_0^1 \sin^2(\lambda_n x)\,dx}.$$

分子と分母はそれぞれ

(12) $$\int_0^1 x\sin(\lambda_n x)dx = \frac{\sin(\lambda_n) - \lambda_n\cos\lambda_n}{\lambda^2}, \quad \int_0^1 \sin^2(\lambda_n x)\,dx = \frac{\lambda_n - \sin\lambda_n\cos\lambda_n}{2\lambda_n}$$

と計算できる (Mathematica を使うならば、このあたりもコンピューター任せに出来る)。

問 3. $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ を計算し、テキストの表 7.2 にある値と比較せよ。((12) から計算しても良いし、いっそのこと積分計算の段階で Mathematica を用いても良い。)

Mathematica で計算した結果 (表 7.2 よりも多くの桁を表示)

```
{0.729175, -0.156164, 0.0613973, -0.0321584, 0.0196707,
 -0.0132429, 0.00951282, -0.00715998, 0.0055821, -0.00447313}
```

(表 7.2 で、例えば $a_{10} = -0.00447$ と有効数字 3 桁しか求めていない。その理由 (著者の考え) が想像できるだろうか？)

2.4　解をグラフで表そう

図 7.5 は、級数を 4 項までで打ち切った $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} a_n e^{-(\lambda_n\alpha)^2 t}\sin(\lambda_n x)$ のグラフであるという。

問 4. テキストの図 7.5 を再現してみよ。いっそのこと 10 項まで取るとどうなるか？

A　問 1 の解答

二分法や Newton 法などのアルゴリズムがある。この場合は Newton 法が便利であろう。どこかの授業で学んだ可能性が高いと思うが、この際、サンプル・プログラムをノーヒントで示す。

newton.c

```
/*
 * newton.c -- Newton 法で方程式 f(x)=0 を解く
 *  コンパイル cc -o newton newton.c -lm
 *  cglsc でコンパイルすることも出来るはず。
 *  いずれにしても実行可能ファイルの名前は newton で、実行は ./newton
 */

#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main(void)
{
  int i, maxitr = 100;
  double f(double), dfdx(double), x, dx, eps;

  printf(" 初期値 x0, 許容精度ε=");
  scanf("%lf%lf", &x, &eps);

  for (i = 0; i < maxitr; i++) {
    dx = - f(x) / dfdx(x);
    x += dx;
    printf("f(%20.15f)=%9.2e\n", x, f(x));
    if (fabs(dx) <= eps)
      break;
  }
  return 0;
}

double f(double x)
{
  return cos(x) - x;
}

/* 関数 f の導関数 (df/dx のつもりで名前をつけた) */
double dfdx(double x)
{
  return - sin(x) - 1.0;
}
```

B　問 2 の解答

(1) ?関数名 として、詳細が知りたければ >> をクリックする。

(2) FindRoot[ ] を使うのが良い。

```
FindRoot[方程式, {未知数, 初期値}]
```

例えば $2\sin x = x$ の $x = 2$ の近くの解が欲しい場合は

```
FindRoot[2Sin[x]==x, {x, 2}]
```

とすると、{x→ 1.89549} という結果が得られる。

(3) グラフによる考察から、λ_n は $(n-1/2)\pi$ に近いことが分かる。ただし $(n-1/2)\pi$ では tan は定義されないので、そのままやると警告が表示される。$(n-1/2+0.001)\pi$ のように少しずらすと良い。あるいは、方程式を変形するという手もある。

(4) $\lambda_1, \ldots, \lambda_{10}$ と 10 個求めるには、例えば Table[ ] を使うと良い。

```
Table[FindRoot[Tan[x] == -x/h, {x, (n - 1/2 + 0.001) Pi}], {n, 1, 10}]
```

この後の例につなげるには、次のようにする。

```
lambda = x /. Table[FindRoot[Tan[x] == -x/h, {x, (n - 1/2 + 0.001) Pi}],
   {n, 1,10}]
```

これで lambda は

```
{2.02876, 4.91318, 7.97867, 11.0855, 14.2074, 17.3364, 20.4692, 23.6043, 26.7409, 29.8786}
```

というリストになり、lambda[[n]] で λ_n が得られる。

C　問題 3 の解答

テキストでは、p. 87 で次の式 (テキストの番号では (7.7))

$$a_n = \frac{2\lambda_n}{\lambda_n - \sin\lambda_n \cos\lambda_n} \int_0^1 \xi \sin(\lambda_n \xi)\, d\xi$$

を導いていて、この文書でも、(12) という式を導いているが、Mathematica で計算するのならば、

$$a_n = \frac{\displaystyle\int_0^1 x \sin(\lambda_n x)\, dx}{\displaystyle\int_0^1 \sin^2(\lambda_n x)\, dx}$$

を使っても良いだろう (積分計算そのものも Mathematica にやってもらう、ということ)。

```
Integrate[x Sin[lambda[[1]]x],{x,0,1}]/Integrate[Sin[lambda[[1]]x]^2,{x,0,1}]
```

とすると 0.729175 という結果が得られる。

後のことを考えて、a_n を計算する a[ ] という関数を作ろう (ここもリストを使うことが出来るが、「色々出来る」ことを見せる目的)。

```
Clear[a]
a[n_]:=a[n]=
  Integrate[x Sin[lambda[[n]]x],{x,0,1}]/Integrate[Sin[lambda[[n]]x]^2,{x,0,1}]

Table[a[n],{n,10}]

?a
```

(この関数には工夫があり、一度計算したものは記憶していて、以後は呼ばれるごとに計算した値を使うようになるので、効率が良い。)

Table[...] の結果は

```
Out[74] = {0.729175, -0.156164, 0.0613973, -0.0321584, 0.0196707,
-0.0132429, 0.00951282, -0.00715998, 0.0055821, -0.00447313}
```

のようになり、テキストの表 7.2 と比較してほぼ一致していることが確かめられる。

D 問題 4 の解答

λ_n $(n = 1, 2, \cdots, 10)$ を記憶した lambda, a_n を計算する a[] があれば、

$$\sum_{n=1}^{4} a_n e^{-(\lambda_n \alpha)^2 t} \sin(\lambda_n x)$$

を計算する関数は次のようにすれば良い (α は 1 とした)。

```
u[x_, t_] := Sum[a[n] Exp[-(lambda[[n]])^2 t] Sin[lambda[[n]] x], {n, 1, 4}]
```

例えば $t = 0.1$ のときのグラフが描きたければ

```
Plot[u[x, 0.1], {x, 0, 1}, PlotRange -> {0, 1}]
```

または少し効率上の工夫をして

```
Plot[Evaluate[u[x, 0.1]], {x, 0, 1}, PlotRange -> {0, 1}]
```

$t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ におけるグラフを重ね書きするには

```
g=Plot[Table[Evaluate[u[x, t]], {t, 0, 0.5, 0.1}], {x, 0, 1}, PlotRange -> {0, 1}]
```

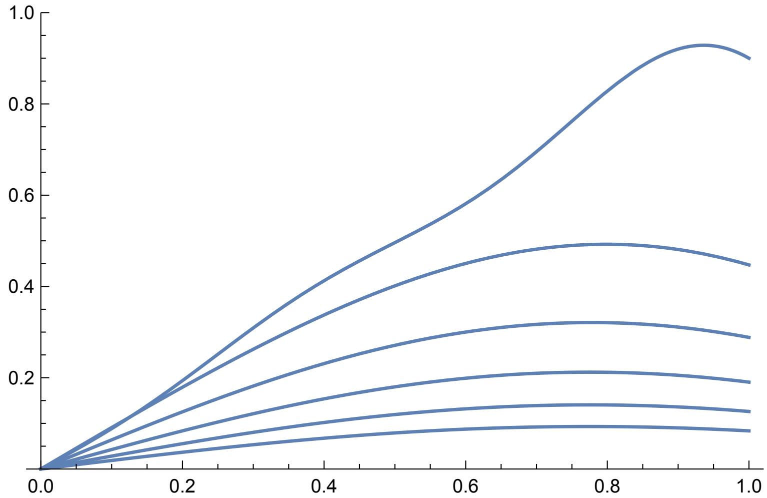

図 2: $t = 0, 0.1, \ldots, 0.5$ のグラフ

図 7.5 とちょっと違うのはなぜだろう？どうすれば図 7.5 に近くなるか？

レポート課題

締め切りは 8 月 3 日 (水曜) 18:00. メールで `katurada@meiji.ac.jp` に送る (成績表提出締め切りは 8 月 4 日なのでくれぐれも遅れないように)。質問があれば何でも気軽にして下さい。

次のいずれかについてレポートせよ。

(1) テキスト第 7 課の練習問題 1, 3 のいずれかの初期値境界値問題、つまり境界条件を

$$u(0,t)=0, \quad u_x(1,t)=0 \quad (0<t<\infty)$$

か

$$u_x(0,t)=u_x(1,t)=0 \quad (0<t<\infty)$$

で置き換えた問題について、Fourier の方法で解を求め、テキスト図 7.5 のような解のグラフを描き[1]、結果について考察する (どちらの問題でも、λ_n, a_n は手計算で求められます)。

(2) テキスト第 7 課の問題

$$\begin{aligned} & u_t=\alpha^2 u_{xx} \quad (0<x<1,\ 0<t<\infty), \\ & u(0,t)=0, \quad u_x(1,t)+hu(1,t)=0 \quad (0<t<\infty), \\ & u(x,0)=x \quad (0\le x\le 1) \end{aligned}$$

を、Fourier の方法ではなく、差分法を用いて解く。
「差分法の勉強の手引き」[2] にどういう方針で取り組めば良いか書いてある。

差分法などの数値計算法については、秋学期開講の「偏微分方程式とシミュレーション」(池田先生担当) で学べるはずだが、微分方程式に関わる研究をするならば、自分でどんどん学ぶことを勧める。

(3) (今回コンピューターに触るのは遠慮したい場合) 自分が輪講の当番で説明した範囲をまとめる。練習問題を 1 つ以上解くこと。

参考文献

[1] Farlow, S. J.: *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, John Wiley & Sons, Inc (1982), 邦訳: スタンリー・ファーロウ 著, 入理 正夫・入理 由美 訳, 偏微分方程式, 朝倉書店 (1996).

[1] 7 課のグラフ、数表をどう再現するかは、(遅くとも) 7 月 22 日のゼミで説明します。
[2] `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/2016/q2/start-sabun.pdf`